



## Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

## Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

- + *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.
- + *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.
- + *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.
- + *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

## Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página <http://books.google.com>



## Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

## Linee guida per l'utilizzo

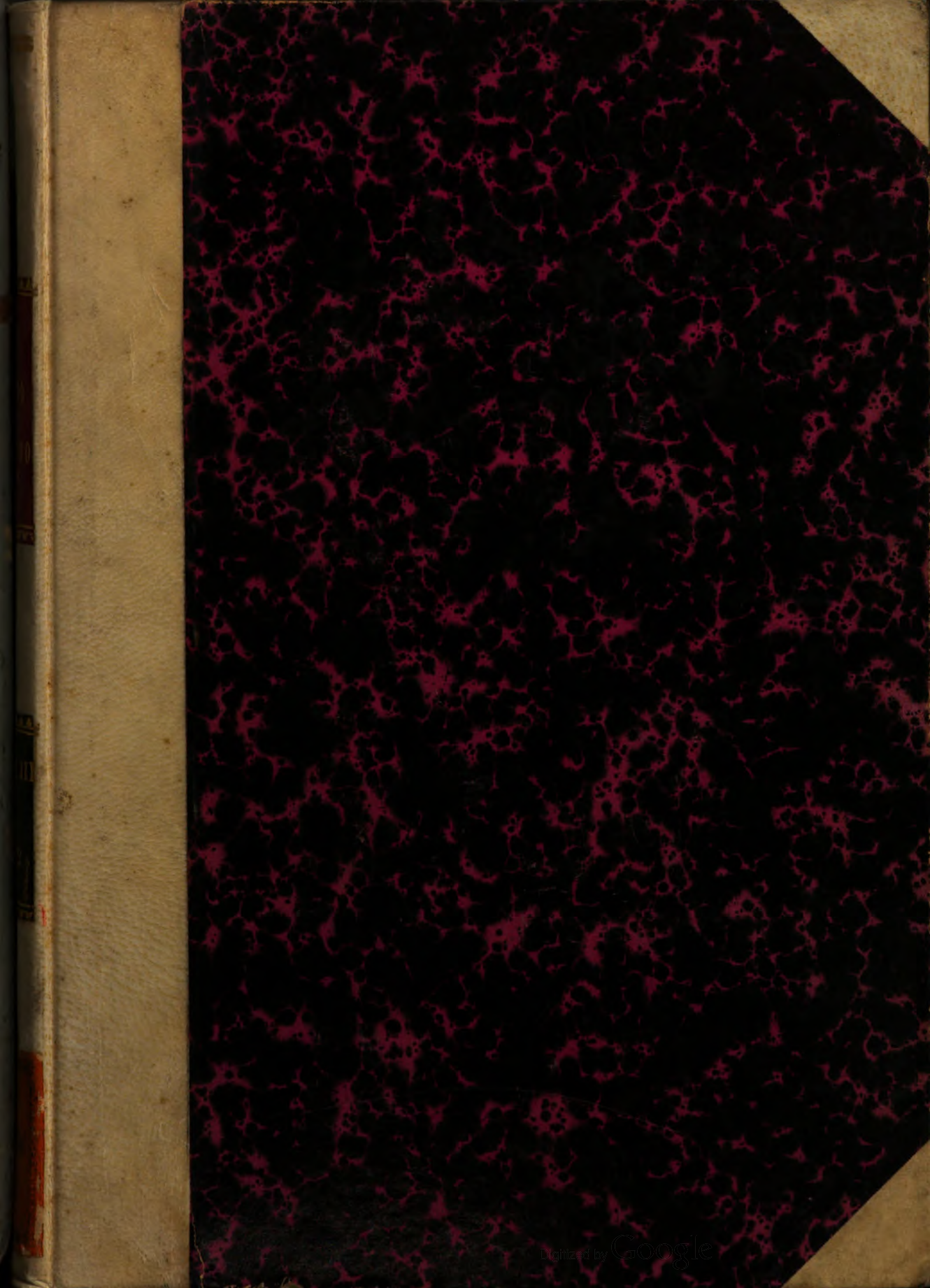
Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

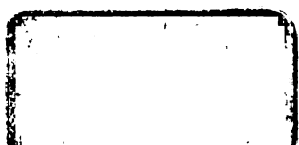
Inoltre ti chiediamo di:

- + *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
- + *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
- + *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
- + *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertarti di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

## Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da <http://books.google.com>











72

( Conto corrente con la Posta )

Si pubblica una volta al mese.

1892. Fascicolo 7. e 8.

# IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATO PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

da E. BETTI e R. FELICI

---

**Terza serie Tomo XXXII.**

LUGLIO e AGOSTO

Pubblicato il 20 Ottobre 1892.



**1892**

**PISA**

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

# INDICE

Necrologia . . . . .	pag. 5
Sopra la tenacità e la plasticità del ferro a diverse temperature — Memoria di M. Ascoli . . . . .	8
Sulla variabilità del calore specifico dell'acqua fra 0° e + 32° — Memoria dei Proff. A. Bartoli ed E. Stracciati . . . . .	19
Sulle proprietà termiche dei vapori — Memoria di A. Battelli ( <i>Continuaz. e fine</i> ). . . . .	33
Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo — Memoria del Professor Eugenio Beltrami. ( <i>Continuazione</i> ) . . . . .	50
Sul principio di Huyghens — Prof. Vito Volterra ( <i>Continuazione</i> ) . . . . .	50
Sulla distribuzione dei potenziali presso il catodo — Nota preventiva del Prof. Augusto Righi . . . . .	94

## RIVISTA

SUNTI di A. STEFANINI. — Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. Vol. XLIII e XLIV 1891.

E. Paschen. Sulle forze elettromotrici . . . . .	65
A. Raps. Pompa automatica a mercurio . . . . .	ivi
K. Prytz. Metodo per la misura assoluta dei periodi di rotazione . . . . .	66
Detto. Determinazione del rapporto fra un periodo di rotazione e la durata di vibrazione di un diapason . . . . .	ivi
C. L. Weber. Sulla misura dell'inclinazione magnetica . . . . .	67
T. Des Coudres. Sulle proprietà termoelettriche del mercurio e delle amalgame molto diluite . . . . .	68
J. Rosenthal. Sulla conduttività elettrica degli elettroliti solidi a diverse temperature . . . . .	69
P. Bachmetjew. Influenza della magnetizzazione sulle proprietà termoelettriche del ferro e del nichel . . . . .	ivi
W. Bohlendorff. Osservazioni alla Memoria del sig. B. Walter "Sulla prova della decomposizione dei gruppi molecolari nelle soluzioni ecc." . . . . .	70
H. Ebert. Influenza del diverso splendore delle linee spettrali sui fenomeni d'interfer. . . . .	ivi
W. Voigt. Su un apparecchio semplice per determinar la dilatazione termica dei solidi, specialmente dei cristalli . . . . .	71
R. Lamprecht. Sulle equazioni della forza elettromagnetica . . . . .	72
W. C. Röntgen. Sulla compressibilità del solfuro di carbonio, del benzolo, dell'etere etilico, e di alcuni alcoli . . . . .	ivi
W. C. Röntgen. e L. Zehnder. Sull'influenza della pressione sull'indice di rifrazione dell'acqua, del solfuro di carbonio, del benzolo, dell'etere etilico e di alcuni alcoli . . . . .	ivi
T. Lohnstein. Influenza della capillarità sull'equilibrio dei galleggianti . . . . .	73
V. Bjerknes. Sul fenomeno della risonanza multipla delle onde elettriche . . . . .	ivi
R. Colley. Apparecchio per l'osservazione delle lente oscillazioni elettriche . . . . .	74
R. Colley. Sulla teoria del rocchetto di Ruhmkorff . . . . .	75
F. Narr. Sulla dispersione dell'elettricità . . . . .	ivi
C. Fromme. Ricerche magnetiche sperimentali . . . . .	ivi

**IL NUOVO CIMENTO**  
**ANNO XXXVIII.**







# IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATO PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

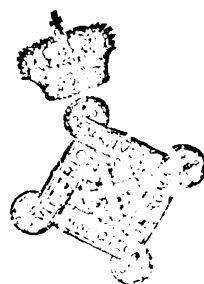
PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

da E. BETTI e R. FELICI

---

**Terza serie Tomo XXXII.**

---



**PISA**

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

1892



---

---

# ENRICO BETTI

---



La morte del Prof. Enrico Betti, avvenuta l'11 Agosto scorso, fu una grave perdita per la scienza, per l'insegnamento, per la patria.

La figura di Lui sotto qualunque aspetto si guardi, si presenta nobile e generosa quanto semplice e modesta. I servizii da Lui prestati alla patria, prima come soldato nella guerra di indipendenza, poi come legislatore ed amministratore lo mettono fra i benemeriti del nostro paese; i lavori scientifici gli danno un posto eminente fra i matematici del nostro tempo; e l'alta efficacia dell'opera sua come maestro ed educatore può solo essere pienamente compresa da chi fu suo allievo.

Il Betti nacque a Pistoia il 21 Ottobre 1823 e nel 1846 ottenne la laurea in matematiche pure ed applicate. Nel 1849 fu nominato professore al Liceo di Pistoia, nel 1854 al Liceo di Firenze e alla fine del 1857 ebbe la cattedra all'Università di Pisa, carica che a partire dal 1865 tenne unita a quella di Direttore della Scuola Normale Superiore.

La carriera scientifica del Betti può esser divisa in tre fasi distinte, le quali sono in rapporto coll'insegnamento da lui professato.

Il decennio che scorre dal 1850 al 1860 fu dedicato dal Betti quasi esclusivamente alle ricerche algebriche, le quali per prime

diedero fama al suo nome e lo collocarono fra quelli che fecero maggiormente progredire le teorie create da Galois e lasciate da questo grande geometra incomplete, poco note e non ben chiare alla maggior parte dei matematici della sua epoca. Le opere del Betti su questo argomento hanno già da lungo tempo preso posto accanto ai classici lavori dei più chiari matematici dei nostri giorni, e costituiscono un monumento del sapere e della forza intellettuale del giovane matematico.

Nel secondo periodo il Betti si è applicato all'analisi, quale la si intende oggigiorno, e più specialmente alla teoria delle funzioni. La teoria delle funzioni ellittiche e sue applicazioni e quella sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa sono infatti le memorie che egli pubblicò dal 1860 al 1862. Il primo di questi due lavori, che disgraziatamente è restato incompleto, mostra che fino da quell'epoca Egli possedeva ed aveva introdotto nell'insegnamento quei metodi che solo recentemente sono stati divulgati e resi comuni ed hanno manifestato, mercè la scuola dell'illustre Weiestrass che ne fu l'iniziatore, la loro grande portata e la loro fecondità. La teoria delle funzioni ellittiche venne più tardi ripresa dal Betti con un altro metodo che risente dell'influenza su di Lui esercitata dalle idee di Riemann, il quale visse qualche tempo a Pisa e fu legato a lui da vincoli di stima e di sincera amicizia. Tale influenza si mostra e con maggior vantaggio nei risultati, anche in successivi lavori di Fisica matematica.

A questi e alle teorie meccaniche si dedicò interamente il Betti nell'ultimo periodo che dal 1863 circa, va fino ai nostri giorni.

I lettori di questo periodico hanno potuto seguire lo svolgimento del suo pensiero scientifico in questa sua ultima fase, giacchè la maggior parte delle memorie scritte in questo tempo vennero o pubblicate originalmente nel *Nuovo Cimento* o qui riprodotte da Atti accademici.

Quasi tutti i rami della Fisica matematica e della Meccanica vennero da Lui coltivati: la teoria del potenziale, quella della propagazione del calore, la termodinamica, la elettricità, il magnetismo, la capillarità, la elasticità, la idrodinamica, il problema degli  $n$  corpi.



Alla teoria del potenziale Egli dedicò molti anni di studio, e frutto delle sue ricerche fu l'opera sulla Teorica delle forze Newtoniane e sue applicazioni alla elettrostatica e al magnetismo, modello di eleganza e rigore nella trattazione di quelle discipline.

Le lezioni sulla elasticità vennero pubblicate in questo giornale nel 1872. Esse costituiscono un'opera di capitale importanza e segnano una data memorabile nella storia di questa teoria.

Infatti per primo il Betti applicò con pieno successo alla integrazione delle equazioni differenziali dell'equilibrio dei solidi elastici quei metodi che già si erano manifestati così fecondi per la equazione di Laplace. A base del suo processo di integrazione pose un teorema che ormai nella scienza è conosciuto sotto il suo nome e che formerebbe da solo, per la sua profondità e per la importanza delle sue applicazioni un titolo non comune di gloria. La portata del metodo iniziato dal Betti si è reso e si va rendendo sempre più manifesto, mercè i lavori dei matematici che lo perfezionarono, e lo applicarono ai più importanti problemi non ancora rigorosamente risolti.

Troppo lungo sarebbe il volere accennare anche di volo a tutte le opere del Betti. Ne diamo solo l'elenco alla fine di questo cenno biografico. Il quale non sapremmo chiudere che con un augurio, ed è che seguendo l'esempio di quello che gli stranieri sogliono fare per le opere dei loro grandi, i matematici italiani provvedano a riunire tutte le memorie scritte dal Betti e sparse in giornali ed in atti accademici difficili a rintracciarsi, in un unico volume che sarà il più bel monumento che possa erigersi alla memoria di un uomo il quale, schivo da ogni volgare vanità, pose a capo dei suoi pensieri l'amore sincero e disinteressato alla scienza.

Prof. VITO VOLTERRA.

(La lista delle Opere pubblicato dal Prof. Betti verrà stampata nel prossimo fascicolo).

---

SOPRA LA TENACITÀ E LA PLASTICITÀ DEL FERRO A DIVERSE  
TEMPERATURE ; MEMORIA DI M. ASCOLI.

1. Il materiale e gli apparecchi che ho adoperato nel presente studio erano stati preparati fin dal 1880 dal compianto Prof. Pisati, il quale intendeva di completare le sue importanti ricerche sopra questo argomento estendendole dai fili alla lamiera. I risultati ottenuti pei fili, in causa del modo particolare di preparazione di questi, non si possono in generale estendere *a priori* a corpi preparati diversamente; ma, nel caso particolare, lo studio acquistava speciale importanza dal fatto che nelle ricerche estesissime del Pisati <sup>1)</sup> l'andamento dei fenomeni era risultato in molti punti dipendente dalla sezione; perciò feci le esperienze sopra righe tolte da lamiera di diverso spessore, ed ebbi cura di moltiplicarle specialmente là dove rimanevano i maggiori dubbi. Secondo il Pisati l'andamento generale del fenomeno risultò eguale per tutti i fili studiati tanto pel ferro che per l'acciaio; la tenacità dalla temperatura ordinaria decresce fino a un minimo per risalire ad un massimo verso i 100°; dopo questo presenta un secondo minimo più notevole dal quale passa bruscamente ad un secondo e grande massimo. La grandezza del primo massimo e la temperatura del secondo minimo risultarono funzioni della sezione, al crescer di questa la prima aumenterebbe la seconda diminuirebbe.

Quando intrapresi il presente lavoro non era venuto a mia conoscenza alcuno studio esteso, fatto in questo senso, sopra corpi di grande sezione. Solo in questi giorni, quando avevo già tutto pronto per la pubblicazione, ho conosciuto la Memoria del sig. Le Chatelier stampata nel 1891 nel giornale *Le Génie civil* <sup>2)</sup>.

Il sig. Le Chatelier non ha però considerato i punti che ora

1) *Sulla tenacità del ferro a diverse temperature* — Società italiana delle Scienze, serie III, vol. II.

2) Le Chatelier. *Influence de la température sur les propriétés mécaniques des métaux* — *Le Génie civil*. T. XIX, 1891, p. 107. — V. anche Martens. *Flusseisen als Konstruktions material* — *Zeitschr. des vereins deutscher Ingenieure*, 1892, n.° 15, p. 427.

ho accennato, perciò malgrado l'analogia di alcuni risultati, credo opportuno di fare la pubblicazione com'era preparata tanto più che quanto riguarda la tenacità si collega con quanto è trattato nella seconda parte del lavoro e che le mie esperienze sono fatte direttamente sopra la lamiera non sottoposta ad altra lavorazione fuorchè quella della divisione in striscie.

## PARTE I. — Tenacità.

2. *Preparazione del materiale.* — Il ferro laminato, proveniente dalle officine del Creusot in Francia, era tagliato in grandi lastre di spessore diverso, variabile da mm. 5 a 0.5. Ciascuna lastra veniva divisa in striscie lunghe un metro e larghe circa due centimetri, mediante una grande macchina piallatrice appartenente all'officina meccanica della R. Scuola di applicazione di Roma, e messa in azione da un motore a gas. Su ciascuna delle striscie veniva battuta una lettera caratteristica della lastra e un numero d'ordine. Dopo ciò le striscie erano lavorate da altra macchina che ne riduceva la larghezza a circa 12 mm. per un tratto nella parte centrale lungo circa 50 cent. In questa seconda macchina le righe passano fra due ruote d'acciaio a denti obliqui e taglienti collocate a distanza eguale alla larghezza che si vuol ottenere; è così assicurata l'uniformità nella larghezza della parte assottigliata; ciò fu confermato dalle misure fatte in seguito; le differenze tra i diversi punti non superarono mai qualche centesimo di millimetro.

Le righe così preparate vennero ricotte nell'anidride carbonica. A questo scopo servì un forno costituito da una canna di ottone lunga due metri. Essa ha un orlo allargato e piallato in modo che vi si possa applicare un coperchio metallico pure piallato e stringerlo a tenuta ermetica mediante robusti bulloni. L'altro estremo del tubo è chiuso con un disco saldato e attraversato da un lungo tubo, chiuso al fondo, che penetra nel primo e serve a contenere un pirometro metallico a quadrante (platino-ferro). Le righe si caricano sopra un lungo cucchiajo semi-cilindrico di lamiera e con esso si introducono nella canna. Vi si applica poi il coperchio interponendo un anello di cartone

d'amianto; indi si estrae l'aria con una macchina pneumatica e si introduce l'anidride carbonica. A ciò servono due chiavi collocate alle due estremità. Il riscaldamento è fatto mediante una serie di 30 lampade Bunsen collocate lungo il tubo il quale è protetto dall'irradiazione mediante un involucri di latta. Si raggiunge così una temperatura superiore ai 500° che si mantiene per più di mezz'ora; poi si raffredda lentamente spegnendo a poco a poco le lampade.

3. *Misura degli sforzi di trazione.* — Le esperienze sulla trazione furono eseguite con una macchina costruita dal Thomasset di Parigi ed appartenente al gabinetto di meccanica applicata alle costruzioni della nostra Scuola <sup>(1)</sup>. È una macchina che i tecnici adoperano per le prove sulla resistenza dei materiali, e si trova descritta nei trattati speciali. La parte essenziale consta di due robuste morse di ferro, snodate in modo che tanto più si stringono quanto più vengon tirate; entro alle mascelle dentate di queste si collocano gli estremi del pezzo da cimentare. Una delle morse è unita ad una vite che avanzando orizzontalmente, produce la trazione; la si fa avanzare girando mediante una grande ruota-volano una vite perpetua che ingrana con un rocchetto contenente la madre vite. L'altra morsa trasmette la trazione per mezzo di una leva ad angolo retto verticalmente al centro di un robusto piatto di bronzo. Questo appoggia sopra un foglio di caoutchouc che ha la superficie inferiore a contatto coll'acqua contenuta in una sottostante vaschetta, comunicante, per mezzo di un tubo, col serbatoio di un manometro a mercurio ad aria libera. Il fulcro della leva ad angolo, e i luoghi dove si applica la trazione dalla morsa alla leva e dalla leva al disco sono costituiti da un coltello di acciaio appoggiato contro una scanalatura che ne rende invariabile la posizione durante lo sforzo. Il manometro è graduato empiricamente in modo da dare immediatamente il valore dello sforzo in chilogrammi. La macchina che ho adoperato serve fino a 5 tonnellate, ma bastano piccole potenze per metterla in azione. Infatti ho constatato che per spostare di un centimetro la morsa mobile, occorrono 32 giri della ruota-volano la cui manovella descrive una circonfe-

(1) Debbo qui ringraziare il prof. C. Ceradini che me ne concesse l'uso.

renza del raggio di 36 cent. onde per un centimetro di spostamento della resistenza la potenza si sposta di 7238 cent., ciò significa che basta una potenza di  $\frac{5000}{7238}$  Kg. cioè di circa 700 grammi per equilibrare il massimo sforzo. Evidentemente quasi tutta la forza che si applica è impiegata a vincere le resistenze passive.

Causa di qualche incertezza nella macchina è il modo con cui la pressione si trasmette al mercurio e la facilità che rimangono racchiuse sotto al caoutchouc delle bolle d'aria. Perciò, ogni giorno di esperienza ho eseguito la verifica del manometro. A questo scopo, tolta la morsa fissa si caricava direttamente il disco premente con pesi conosciuti, oppure, per le maggiori pressioni, si appoggiava sul coltello centrale una robusta sbarra di ferro che agiva come una leva di 2° genere il cui fulcro era fissato al sostegno della macchina; lungo questa leva si collocano dei pesi conosciuti. Misurando accuratamente i bracci di leva di questi pesi, come quelli della leva ad angolo sopra citata si ottenevano facilmente le pressioni in chilogrammi che servivano a correggere le indicazioni del manometro. Le correzioni generalmente sono piccole per le forti pressioni, maggiori e sempre in più per le piccole, se si prendono come ascisse le indicazioni del manometro, come ordinate le vere pressioni la linea che si ottiene invece di essere una retta, parte dall'origine con una notevole convessità in alto, e non raggiunge che per pressioni elevate (1000 Kg. circa) la forma di una retta che però, prolungata, non passa per l'origine. Questo fatto dipende probabilmente dalle deformazioni elastiche del foglio di caoutchouc.

4. *Riscaldamento delle righe.* — Per portare le righe a diverse temperature fu costruito un bagno di rame di forma parallelepipedica lungo cent. 75, largo cent. 14 alto cent. 18, che si collocava tra le due morse. Era attraversato in tutta la lunghezza da un tubo destinato al passaggio delle righe che vi entravano per tutta la lunghezza della parte assottigliata e per parte della larga. Intorno alle righe si collocavano dei filacci di amianto che, chiudendo il tubo, impedivano la formazione di correnti di aria. Nell'interno del bagno, intorno al tubo, era avvolta ad elica una lamina di rame che, posta in rotazione mediante una ma-



novella esterna e un ingranaggio, serviva da agitatore dell'olio, destinato al riscaldamento. Il bagno era chiuso con un coperchio di rame attraversato da un termometro diviso in gradi fino a 360°. Al di sotto si accendevano delle lampade Bunsen in diverso numero a seconda delle temperature che si volevano raggiungere. Si riusciva così facilmente a mantenere a lungo la temperatura costante entro pochi decimi di grado. Le righe si lasciavano per una diecina di minuti a temperatura costante prima di mettere la macchina in azione.

5. *Misura delle dimensioni e degli allungamenti.* — Prima delle esperienze si misuravano le dimensioni di ciascuna riga cioè la larghezza e lo spessore. Le misure si facevano in tre punti diversi, cioè nel mezzo e verso i due estremi della parte assottigliata, mediante un calibro Palmer che dà il centesimo di mm.; nei calcoli si introducevano poi i valori trovati per il punto più prossimo a quello di rottura, oppure la media dei più prossimi. Lo spessore delle righe tratte dalla medesima lastra non è perfettamente uniforme; i valori medii trovati sono i seguenti:

SERIE	B	CD	E	F	H	I	L
SPESORE	4,15	3,05	2,70	2,09	1,06	0,76	0,61.

Quanto alla larghezza era, come si è detto, di circa 12 mm. per tutte le righe; ma, cominciate le esperienze a temperature elevate, non tardai ad accorgermi che per tali temperature questa larghezza era soverchia giacchè l'aumento della tenacità nella parte calda era tale che le righe si rompevano di preferenza nella parte fredda sebbene di sezione tanto maggiore. Per le esperienze a temperature elevate ho dovuto perciò far assottigliare le righe per un tratto verso la metà, giacchè mi era impossibile mettere ora in azione gli arnesi sopra citati per assottigliarle in tutta la lunghezza. La larghezza fu ridotta colla lima a circa 10 mm. per un tratto di 6 cent. e si ebbe cura di ricuocere ancora le righe dopo la lavorazione. Ho potuto constatare che queste operazioni non portavano nei risultati sensibili perturbazioni.

Per la misura degli allungamenti permanenti delle varie parti delle righe, tracciai su ciascuna 6 tratti alla distanza di

10 cent. segnati mediante una punta di ottone e misurati mediante un regolo d'ottone millimetrato. L'indole dei fenomeni che si tratta di studiare renderebbe inutile od illusoria una maggior precisione.

Il numero delle righe rotte in questa serie di esperienze eseguite negli scorsi mesi di dicembre, gennaio e febbraio (1891-92) fu di circa 250 distinte in 7 serie a seconda del loro spessore, la temperatura cui furono portate giunse sino a 300°.

6. *Andamento generale delle esperienze.* — Raggiunta la temperatura voluta e lasciato scorrere il tempo necessario perchè fosse assicurato l'equilibrio termico, si incominciava a far agire la macchina col moto regolare impresso da un operatore alla ruota motrice; nello stesso tempo un altro operatore agitava continuamente l'olio osservando di tanto in tanto la temperatura, ed un terzo seguiva il manometro. Questo dapprima saliva rapidamente, poi si fermava quasi a un tratto quando era oltrepassato il limite di elasticità della riga e infine, dopo qualche oscillazione riprendeva un lento andamento ascendente mentre la riga subiva forti allungamenti. Lo studio di questi in relazione alla forza di trazione è oggetto della seconda parte di questa pubblicazione. Infine si raggiungeva una massima tensione dopo la quale il manometro discendeva rapidamente finchè dopo breve tempo, avvenuta la rottura, cadeva allo zero. Osservando la riga durante l'esperienza si poteva osservare che la caduta della tensione incominciava quando in un punto si manifestava un grande restringimento il quale procedeva rapidamente fino alla rottura. Questa osservazione ci sarà utile in seguito. Ma le cose non avvengono allo stesso modo a tutte le temperature. Quest'ultimo restringimento locale notevolissimo a temperature basse, diventa piccolissimo alle alte, in modo che la rottura avviene bruscamente, cioè il manometro, raggiunta la massima altezza, cade quasi subito a 0.

Un'altra differenza singolare tra le alte e le basse temperature sta in ciò che, durante la trazione a temperature alte le righe, specialmente le più grosse, fanno sentire un rumore discontinuo fortissimo come di piccoli e frequenti colpi di martello; questi sono accompagnati da notevoli oscillazioni del manometro che cessano però quasi del tutto in vicinanza della

rottura, esse manifestano degli allungamenti bruschi e intermittenti <sup>1)</sup>. Alle più alte temperature i rumori discontinui non cessano ma ad essi si accompagna un rumore continuo più debole somigliante a quello di un liquido in ebollizione. Invece a freddo tutto avviene silenziosamente. Osservate le righe rotte a temperature elevate si constata che la loro superficie è ricoperta di piccole increspature trasversali somiglianti a quelle prodotte dal vento sulla superficie delle acque.

Fatta la lettura della massima tensione raggiunta e della temperatura, si misuravano gli allungamenti col regolo millimetrato notando anche la posizione della rottura ciò che serviva poi alla scelta del valore della sezione primitiva pel calcolo della tenacità. In molte esperienze non mi limitai a notare la massima tensione ma volli seguire il suo andamento dal principio sino alla rottura, notando l'indicazione del manometro ad ogni dieci giri della ruota motrice che corrispondono ad uno spostamento della morsa mobile, cioè un allungamento della riga, di mm.  $10^{10/12} = 3,12$ . Queste osservazioni ci serviranno in seguito per lo studio della plasticità del ferro a diverse temperature.

7. *Precisione delle misure.* — Quanto alla precisione delle misure osserverò che una parte del manometro, lunga circa 5 millimetri, corrisponde allo sforzo di circa 10 chilogrammi, la lettura dunque si fa bene fino ai due chilogrammi, ma ben maggiore è l'incertezza propria alla macchina stessa la quale presenta delle variazioni notevoli che si correggono mediante la frequente verifica del manometro, ma non si eliminano completamente. Inoltre, specialmente dopo le forti trazioni, si osserva uno spostamento dello zero il quale a poco a poco va scomparendo; esso dipende probabilmente dalla elasticità del foglio di caoutchouc. Tuttavia, le trazioni osservate essendo sempre comprese tra i 200 e i 2000 Kg., l'errore relativo proveniente dalla detta incertezza non è grande specialmente per le righe più grosse. Ad ogni modo le incertezze dovute a cause inerenti all'indole stesso del fenomeno che si studia sono molto maggiori,

1) Il Le Chatelier li chiama *allongements par saccades*. li attribuisce ad una trasformazione progressiva del ferro per effetto della trazione ad alta temperatura.

onde sarebbe inutile ricorrere a mezzi i più precisi. E infatti i risultati ottenuti si possono ritenere molto soddisfacenti per questo riguardo; ciò che prova non tanto la precisione delle esperienze quanto le ottime qualità del ferro adoperato. Per le righe più sottili era naturale aspettarsi un andamento meno regolare giacchè i piccoli difetti di omogeneità sia della massa sia della superficie hanno su di esse un effetto relativo molto più considerevole.

La misura della sezione si deduceva da quella della larghezza e dello spessore delle righe ammettendo la forma rettangolare. Abbiamo dunque tre cause di errore, la prima dovuta allo strumento di misura, la seconda alla vera forma della sezione, la terza all'incertezza del valore nel punto di rottura. Quanto alla prima, abbiamo detto che lo strumento dà il centesimo di millimetro; questo limite di precisione può facilmente essere raggiunto nella misura dello spessore e della larghezza nelle righe più grosse nei cui fianchi l'estremità della vite del calibro trova punti di appoggio sicuri; l'incertezza invece è maggiore per le larghezze delle righe sottili. Indicando con  $\lambda$  e  $\sigma$  la larghezza e lo spessore con  $\alpha$   $\beta$  l'incertezza nelle loro misure,  $\delta S = \alpha\lambda + \beta\sigma$  sarà quella nella misura della sezione  $S$ . Per le righe più grosse cioè per  $\sigma$  compreso tra 4 e 1 mm. possiamo porre  $\beta = 0,02 = \alpha$  allora  $\delta S$  per  $\lambda = 10$  è compreso tra 0,3 e 0,2 sopra valori di  $S$  da 40 a 10 mm. q. invece, per  $\sigma$  compreso tra 0,5 e 1,0  $\beta = 0,02$   $\alpha = 0,05$   $\delta S$  giunge a circa 0,5, sopra valori di  $S$  da 10 a 5 mm. q. L'errore relativo non supera il 2 per cento nel primo caso, può giungere invece al 10 % nel secondo. Quanto alla forma della sezione non è possibile stabilire alcun modo di verifica; ma il modo con cui vennero tagliate le righe assicura la quasi perfetta perpendicolarità dei fianchi sulle faccie. Finalmente della incertezza proveniente dalle differenze di sezione lungo la riga può dare una idea il confronto dei numeri ottenuti per le tre misure fatte sopra ciascuna. Le differenze tra queste, sia per la larghezza come per lo spessore, si riducono quasi sempre a pochi centesimi e per lo più la variazione avviene regolarmente onde se ne elimina l'effetto scegliendo opportunamente il valore della sezione in base alla posizione della rottura. La maggiore incertezza rimane dunque quella pro-

veniente dalla prima causa; nel calcolarla ci siamo messi nelle condizioni più sfavorevoli, perciò i valori dati sopra si possono ritenere come espressione della incertezza complessiva. Per gli spessori non inferiori a un millimetro, tali valori sono più che sufficienti in simil genere di ricerche; per gli altri l'incertezza è troppo grande, ciò che, unito alle altre ragioni prima accennate, spiega perfettamente l'andamento alquanto irregolare dei risultati ottenuti; perciò nel risultato finale non terremo conto delle serie I ed L; tuttavia credo opportuno di riportare nelle tabelle e nelle tavole i dati immediati delle osservazioni anche per queste serie, giacchè, malgrado gli scostamenti notevoli, l'andamento generale del fenomeno è perfettamente analogo a quello presentato dalle altre serie e serve a queste di conferma.

8. *Allungamento e restringimento.* — Nelle tabelle riportate più avanti, insieme ai dati necessari al calcolo della tenacità sono registrati nella colonna ottava gli allungamenti, ossia il rapporto ( $p$ ) tra la lunghezza finale e la primitiva; la misura di questi allungamenti venne fatta nel modo sopra indicato. Essa mostrò che l'allungamento si può distinguere in due parti; l'una distribuita lungo tutta la riga l'altra localizzata nel punto di rottura. La prima risulta sempre abbastanza uniforme, sebbene si osservino notevoli irregolarità dipendenti certamente da mancanza di omogeneità; si hanno talvolta delle parti che si allungano quasi come se in esse dovesse avvenir la rottura mentre poi predomina l'allungamento di altre parti. Perciò non è questa una misura su cui si possa fare grande assegnamento. I numeri dati riguardano la prima parte dell'allungamento quella che possiamo chiamare l'allungamento *proporzionale*; è quella che più ci interessa perchè l'altra parte, l'allungamento *locale* non si verifica che dopo raggiunta la massima tensione (V. § 6). Questo allungamento proporzionale si è calcolato misurando, dopo la rottura, dei cinque decimetri segnati su ciascuna riga, quei 3 o 4 in cui non giungeva traccia dell'allungamento locale; moltiplicando per 5 la media di queste misure si aveva l'allungamento proporzionale dei 5 decimetri che diviso per la lunghezza primitiva (500 mm.) dava l'allungamento per ogni unità di lunghezza. Sottratto dall'allungamento totale il proporzionale si otteneva il locale; non riporto i numeri che vi si riferiscono



perchè non ho potuto constatare alcun andamento abbastanza regolare: solo ho potuto osservare che alle temperature più elevate quest' allungamento diventa piccolissimo ciò che si accorda colla osservazione fatta al § 6 che la rottura accade bruscamente. La misura degli allungamenti non può essere fatta sulle righe ristrette nel mezzo che adoperai per le temperature più elevate, perchè non comparabile con quella delle altre.

Invece su tutte ho potuto misurare la sezione finale. Il rapporto tra la iniziale e la finale è scritto nell' ultima colonna delle tabelle esso ci interessa più che non il rapporto delle lunghezze perchè si riferisce propriamente al luogo di rottura. Per determinare questo rapporto ho misurato per ogni riga, dopo la rottura, lo spessore e la larghezza; ma non feci tale misura propriamente alla sezione di rottura giacchè interessava specialmente conoscere la sezione nel momento della massima tensione; la misura venne perciò fatta alla distanza di qualche millimetro dalla rottura dove cessa il restringimento locale; vi è in ciò qualche incertezza specialmente quando l' allungamento locale si prolunga di più come accade alle temperature più basse; tuttavia i risultati, come vedremo, riuscirono abbastanza soddisfacenti.

9. *Frattura.* — Noterò finalmente qualche osservazione sulla forma della frattura. Ho disegnato per ciascuna riga le due linee che rappresentano i lati della frattura, la linea di larghezza e quella di spessore. Le diverse serie non si comportano tutte nel medesimo modo, però si possono distinguere due forme di frattura di larghezza e due di spessore, che si presentano sempre tranne nei casi, non frequenti, di fratture molto irregolari. La frattura in larghezza o è trasversale cioè perpendicolare allo spigolo maggiore della riga o è inclinata a 30° circa; non si presentano quasi mai inclinazioni diverse da questa. Si potrebbe sospettare che tale angolo costante dipendesse dalla direzione secondo cui son tagliate le righe rispetto a quella dei cilindri del laminatoio; ma la costanza dell' angolo stesso per tutte le righe e la influenza della temperatura che ora noteremo non confermano questa spiegazione.

La frattura in spessore o è rettilinea e inclinata a 45° sulle faccie maggiori della riga, oppure ha la forma di un V; in quo-

sto caso quasi sempre per metà circa della larghezza il V è diritto per l'altra metà è capovolto.

Nelle diverse serie queste forme sono diversamente combinate tra loro.

Nella serie B quasi tutte le fratture furono molto irregolari.

Nella C e D quasi tutte regolari. Frattura in larghezza sempre normale, in spessore a V fino a  $150^\circ$ ; a V nel mezzo e a  $45^\circ$  lateralmente da  $150^\circ$  a  $200^\circ$ ; a  $45^\circ$  è nettissima da  $200^\circ$  a  $300^\circ$ ; solo per due righe a  $231^\circ$  e  $266^\circ$  si trovò la forma V ma per queste la frattura in larghezza si trovò inclinata a  $30^\circ$  invece che normale.

Nella E non si può stabilire nessuna regola, tendono però anche qui a prevalere ad alte temperature le fratture normali in larghezza e a  $45^\circ$  in spessore.

Nella F molte irregolarità a basse temperature fino a  $73^\circ$ ; poi le irregolarità cessano completamente fino alla massima temperatura raggiunta. Frattura in larghezza a  $30^\circ$  in spessore a V.

Nella H pure si presentano molte irregolarità in principio, che cessano a  $62^\circ$ ; poi la frattura in larghezza prende l'inclinazione a  $30^\circ$  che conserva fin verso i  $175^\circ$ , da  $175^\circ$  a  $300^\circ$  è invece quasi sempre normale salvo qualche irregolarità. Per l'osservazione della frattura in spessore queste righe e le successive sono troppo sottili.

Nella I quasi tutte irregolari sino a  $114^\circ$ , poi sempre regolarissime. Predomina in generale la forma normale, specialmente alle temperature più elevate.

Nella L quasi tutte irregolari fino a  $73^\circ$  dopo tutte regolarissime, da  $73^\circ$  a  $266^\circ$  tutte a  $30^\circ$ , da  $266^\circ$  a  $306^\circ$  tutte normali.

Da queste osservazioni appare evidente una relazione tra la forma della frattura e la temperatura. Come risultato generale e nettamente stabilito si può ammettere che le fratture tendono ad essere irregolari a temperature basse, mentre diventano regolarissime e nitide a temperature elevate. Inoltre a temperature elevate tende a predominare la forma normale e a  $45^\circ$ , alle basse la forma a  $30^\circ$  e a V. Infine noteremo che la temperatura a cui cessano le irregolarità pare prossima a quella di minima tenacità. Queste osservazioni tendono a confermare il fatto sta-

bilito dal sig. Le Chatelier secondo il quale dopo la temperatura del minimo avviene una trasformazione molecolare permanente.

(Continua).

SULLA VARIABILITÀ DEL CALORE SPECIFICO DELL'ACQUA FRA  $0^{\circ}$  e  $+32^{\circ}$ ;  
MEMORIA DEI PROFF. A. BARTOLI ED E. STRACCIATI.

Ogni misura calorimetrica in cui l'acqua che riempie il calorimetro non prova un riscaldamento da  $0^{\circ}$  ad  $1^{\circ}$ , richiede una correzione, per far la quale, è necessario conoscere esattamente la legge con cui varia il calore specifico dell'acqua: e su questa legge appunto regna la più grande incertezza, visto il grande disaccordo fra i risultati dei diversi sperimentatori. Di tale incertezza risentono tutte le misure calorimetriche; e se ciò è di poco danno nelle misure nelle quali non si può richiedere per ora molto rigore (come per es. in quelle di termochimica) è invece causa di grandi errori in altre misure, come per es. nella determinazione dello equivalente meccanico del calore e in quella del calore svolto dalle correnti nei circuiti metallici.

Il calore specifico dell'acqua a diverse temperature è stato studiato dal Regnault <sup>1)</sup>, dal Bosscha <sup>2)</sup>, dal Pfaundler e Platner <sup>3)</sup>, dall'Hirn <sup>4)</sup>, dall'Jamin <sup>5)</sup>, dall'Henrichsen <sup>6)</sup>, dal Baumgartner <sup>7)</sup>, dal Vüllner <sup>8)</sup>, dalla sig. Stamo <sup>9)</sup>, dal sig. Gerosa <sup>10)</sup>,

1) *Ann. de Ch. et de Phys.* vol. 78 pag. 5, 1847. — *Mémoires de l'Académie Royale des sciences, de l'Institut de France*, T. XXI, pag. 729-749, Parigi 1847; *Comptes Rendus* T. LXX, pag. 664, Parigi 1870.

2) *l'ogg. Ann. Jubelband*, 549.

3) *Pogg. Ann.* CXL, s. 574, CXLI, s. 537.

4) *Comptes Rendus*, LXX, pag. 592, 531.

5) *Comptes Rendus*, LXX, pag. 661.

6) *Wiedemann Ann.* VIII, pag. 83.

7) *Id.* VIII, pag. 648.

8) *Id.* X, pag. 284 e IV pag. 286, dove son riferite le misure del sig. W. Münchhausen.

9) M. Stamo, *Untersuchung über die spezifische Wärme des Wassers: Inaugural Dissertation*. Zurich; Druck von Zürcher und Furrer 1877 (Memoria gentilmente donataci dalla Biblioteca cantonale di Zurigo).

10) *Atti della R. Acc. dei Lincei*, vol. X. seduta del 24 aprile 1885.

dal Rowland <sup>1)</sup>, dal sig. A. W. Velten <sup>2)</sup>, dal sig. Neesen <sup>3)</sup>, dal sig. G. A. Liebig <sup>4)</sup>.

Non è qui il luogo di parlare dei metodi tenuti da questi fisici e diremo soltanto: che in alcuni l'aver trascurato il confronto dei termometri col termometro a gaz toglie il valore ai risultati, e che in altri si può rimproverare lo scarso numero di esperienze fatte in proposito (Rowland, *on the mec. ecc.* pag. 128).

Noi abbiamo ripreso le esperienze sul calore specifico dell'acqua, ispirandoci più che in nessun altro, nei lavori del Regnault, non senza tener assai conto di quelli del Rowland e di altri ancora. Insieme con l'acqua abbiamo voluto ripetere lo stesso studio sul mercurio, il quale fu già proposto ed impiegato come liquido calorimetrico.

Per determinare il calore specifico dell'acqua noi abbiamo impiegato diversi metodi: in tutti però la capacità dei calorimetri e perciò anche la massa del liquido fu assai considerevole.

1.° Facendo cadere nell'acqua del calorimetro delle palline metalliche scaldate a  $+100^{\circ}$ , impiegando palline non alterabili nell'acqua e di cui si conosce il calorico specifico vero a

1) *On the mechanical Equivalent of Heat and on the variation of the specific heat of water* (Cambridge, Jon Wilson and son, 1880) e *Appendix containing the comparison With Dr. Joule's thermometer*; Memorie gentilmente favoriteci dall'Autore.

2) *Annalen der Physik*, 1884 Bd. XXI, pag. 31-64.

3) *Id.* 1883 Bd. XVIII, pag. 369-387.

4) G. A. Liebig. *Variation de la chaleur spécifique de l'eau*, *American Journal*, vol. XXVI, 1883. — *Journal de Physique*, 1884 pag. 184.

Vedasi anche:

E. A. Rowland; *Relazione critica sulle varie determinazioni dell'equivalente meccanico della caloria*; Venezia, Tipografia Antonelli 1882. (Memoria premiata dal R. Istituto Veneto).

A. Bartoli ed E. Stracciati, *Revisione di alcune misure calorimetriche fondamentali*. Nuovo Cimento, serie terza vol. XVIII, 1885; Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, seduta del 21 giugno 1885.

A. Bartoli ed E. Stracciati, *Sul calore specifico dell'acqua, a diverse temperature*, seconda nota preliminare, *Bullettino dell'Accademia Gioenia di Catania*, fascicolo VII, Maggio 1889.

A. Bartoli ed E. Stracciati, *Sul calore specifico dell'acqua*; terza nota preliminare; *Bullettino dell'Accademia Gioenia di Catania*, fascicolo XVIII, 1891.

A. Bartoli ed E. Stracciati, *Calore specifico dell'acqua sopraffusa*; Nuovo Cimento, Pisa 1892.

M. Berthelot, *Ann. de Chim. et de Phys.* T. IV, 1885, e *Journal de Physique*, 1891.

G. Dieterici, *Wied. Ann.* T. 33, pag. 417-444.

N. Hoeschus, *Journal de Physique* sec. s. T. VII pag. 489; 1888.

tutte le temperature fra 0° e 100°, (Regnault). Questo metodo fu da noi adoperato anche impiegando il mercurio per liquido calorimetrico e facendovi cadere delle palline di platino.

2.° Aggiungendo all'acqua del calorimetro una determinata massa di acqua a zero gradi (Rowland, l. c. pag. 123) o a 100° (Regnault, Rowland).

3.° Aggiungendo all'acqua del calorimetro una determinata massa di acqua a temperatura ben determinata, ma diversa da quella del calorimetro (Regnault, Rowland).

Con questi metodi noi abbiamo eseguito oltre duemila esperienze, nelle quali abbiamo impiegato nove anni, lavorandoci indefessamente, quasi senza interruzione, con l'assistenza di diversi giovani fisici, i quali ci hanno molto aiutato nelle esperienze preliminari e nelle operazioni accessorie.

Le esperienze s'incominciarono nel 1883 nel ricco gabinetto di Fisica dell'Istituto Tecnico di Firenze, Via S. Gallo 68, e furono proseguite indefessamente fino al 1886; dal 1887 al 1891 furono compiute nell'Istituto Fisico della Università di Catania; in questi ultimi anni ci applicammo specialmente allo studio ed al confronto dei termometri, secondo le regole della moderna termometria. — Ora che abbiamo compiuto questo lunghissimo e penoso lavoro sentiamo il dovere di ringraziare vivamente i chiarissimi signori Dottori G. Papasogli professore a Firenze, Paolo Guasti ora professore a Intra, principe B. Galitzine ora professore all'Università di Mosca, ed A. Mochi di Firenze, i quali si compiacquero di assisterci a Firenze, prendendo per i nostri studi il più vivo interesse; e così pure ringraziamo i signori G. Raffo di Genova e G. Platania di Acireale, per lo zelo intelligente col quale prestarono l'opera loro nei confronti e negli studi termometrici compiuti a Catania.

## I.

### *Termometri.*

I termometri adoperati furono ventisette; quattro normali, in vetro duro, costruiti da Tonnellot di Parigi, identici a quelli che esso fornisce al Bureau internazionale di pesi e misure di

Sevres più altri quattro normali che ci servirono nelle determinazioni sussidiarie, e quattordici calorimetrici, portanti lo zero, e divisi in cinquantesimi di grado, col grado ampio più di trenta millimetri, (costruiti da Baudin di Parigi) e da lui divisi in parti di uguale capacità: oltre questi termometri, in una serie di determinazioni, abbiamo pure adoperati quattro termometri calorimetrici, a cinquantesimi di grado, costruiti dal fu Geissler di Bonn, ed uno di Tonnelot, diviso in centesimi di grado, il quale servì più che altro per le basse temperature.

Quasi tutti i termometri erano già stati costruiti da oltre tre anni avanti il principio dei nostri studi; alcuni anzi erano di data anche più antica, per cui la posizione dello zero (a zero) non variava più sensibilmente col tempo, la variazione era inferiore ad  $\frac{1}{1000}$  di grado, per ogni mese, nel primo anno in cui s'intrapresero queste esperienze; oggi, che siamo alla fine, si è ridotta inferiore al  $\frac{1}{1000}$  di grado (per un mese) e per alcuni termometri è affatto nulla.

### *Termometri normali.*

I quattro termometri normali in vetro duro *a, b, c, d*, erano stati costruiti dal Tonnelot di Parigi secondo le norme prescritte dal Bureau internazionale di pesi e misure di Sevres; erano divisi a decimi di grado, colle divisioni di uguale lunghezza <sup>1)</sup>.

I primi due *a* e *b*, portavano tutta la scala, da  $-6^{\circ}$  a  $+103^{\circ}$ , ed avevano il grado lungo 5 millimetri circa; gli altri due *c* e *d*

1) Vedansi le memorie sulla termometria nei *Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures*, Paris Gauthier Villars.

A. E. Guillaume, *Traité pratique de la thermométrie de précision*, Paris, 1889.

Vedansi seguatamente le importanti memorie:

Ch. Ed. Guillaume, *Études thermométriques*; *Travaux et mémoires du bureau international etc.* T. V. parte I, A. III.

Pernot, *Travaux et mémoires* t. 1<sup>o</sup> p. B;

Chappuis, *Études sur le thermomètre à gaz et comparaisons des thermomètres à mercure avec les thermomètres à gaz*; *Travaux et mémoires etc.*, t. VI, 1888.

Max Thiesen, *Vergleichungen von Quecksilberthermometern* (Metronomische Beiträge, n. 3, Berlin 1881).

E. I. Mills, *Researches on thermometry* Trans. roy. soc. of. Edinburg, t. XXIX pag. 567, anno 1880.

Thorpe e Rücker, *Phil. Mag.* quinta s. t. XII, pag. 1-184.

Rowland, *On the mechanical equivalent of Heat*; Cambridge, 1880.

erano muniti di due serbatoj intermedi, in questi la divisione procedeva da  $-5^{\circ}$  a  $+38^{\circ}$ ; quindi da  $+64^{\circ}$  a  $+66^{\circ}$  fra il primo e il secondo serbatoio, ed infine fra  $+97^{\circ}$  a  $+102^{\circ}$  dopo il secondo serbatoio; i gradi erano in ciascheduno di ugual lunghezza, (circa 12 millimetri).

Per ciascuno di questi termometri fu prima verificata l'equidistanza dei tratti della divisione, che fu trovata giusta. Di poi si procedè al calibraggio, coi metodi stessi praticati dal Bureau internazionale di Sevres; vale a dire per i termometri normali *a*, *b*, si procedè dapprima ad una divisione in cinque parti, e poi al calibraggio di due in due gradi, infine si ricalcolò una seconda approssimazione della divisione in cinque parti: costruiamo così per ciascheduno dei termometri, una tavola delle correzioni di calibro, procedente di decimo in decimo grado.

Invece, coi termometri *c* e *d* aventi due ampolle intermedie, venne fatta la suddivisione in tre parti, il calibraggio della parte inferiore [ $-2^{\circ}$ ,  $+38^{\circ}$ ] di due in due gradi; i punti vicini a  $66^{\circ}$  ed a  $100^{\circ}$  furono determinati con colonne speciali.

*Coefficienti di pressione — Intervallo fondamentale.  
Posizione dello zero.*

Il coefficiente di pressione esterna fu determinato per ciaschedun termometro con un apparecchio quasi identico a quello descritto dal sig. E. Guillaume, nella sua memoria *Etudes thermometriques* (T. V. dei Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures, Parigi 1886, pag. 26). Così pure fu determinato più volte avanti di cominciare le nostre determinazioni, lo intervallo fondamentale, seguendo il metodo stesso indicato nella memoria sopra citata.

Per le correzioni dello zero, noi ci siamo assicurati, che i termometri, già costruiti da lungo tempo, avevano gli zeri a zero (cioè dopo lunghissima immersione nel ghiaccio) quasi invariabili; le variazioni mensuali erano inferiori al millesimo di grado.

La posizione dello zero dopo lungo soggiorno del termometro in un ambiente a zero fu determinata annualmente; le correzioni dello zero dopo che il termometro era stato mantenuto

•

per un certo tempo ad una temperatura  $t$  (sempre inferiore a  $+35^\circ$  nelle nostre misure) fu calcolato pei termometri Tonnellot in vetro duro, servendosi dei dati forniti dalle memorie sopra citate del sig. Guillaume <sup>1</sup>).

Per i termometri fabbricati con diverse specie di vetro fu fatto uno studio speciale, di cui rendiamo conto in una nota che farà seguito alla presente memoria.

Così, per ciascheduno dei termometri in vetro duro avevamo compilate quattro tavole di correzioni.

- 1.<sup>a</sup> Per le correzioni di calibro.
- 2.<sup>a</sup> Per le correzioni di pressione esterna.
- 3.<sup>a</sup> Per le correzioni di pressione interna (il termometro avendo la posizione verticale nelle nostre determinazioni).
- 4.<sup>a</sup> Per le correzioni d'intervallo fondamentale <sup>2</sup>).
- 5.<sup>a</sup> Un' ultima correzione doveva portarsi alla lettura dei nostri termometri per ridurli al termometro a gaz.

Quest' ultima correzione venne fatta al termometro normale  $a$  (che fu studiato nel 1886 al *Bureau International des poids et mesures di Sevres*, dal chiarissimo sig. Dottor E. Guillaume mercè la gentile intercessione del compianto D. Brock direttore di quell' Istituto), col mezzo della tavola dedotta dai confronti del M. Chappuis, dei termometri in vetro duro col termometro ad azoto.

Il termometro normale  $b$  e così pure quello  $d$  furono confrontati a Firenze nel 1885 col termometro ad aria, dal Professor Bartoli; il confronto fu minutissimo, per tutti i gradi compresi fra  $0^\circ$  e  $+35^\circ$ ; infine il termometro  $d$  fu confrontato a Baltimora, nel 1886 dall' illustre Prof. Rowland, il quale ebbe la compiacenza di paragonarlo lungamente coi suoi termometri normali 6163, 6165, 108954, 6166, 108947, 7316, da lui già studiati e paragonati col termometro ad aria, nel suo notevole lavoro per la determinazione dell' equivalente meccanico del calore <sup>3</sup>).

1) Vedasi anche E. Guillaume, *Traité pratique de la thermométrie de précision*, Paris 1887, Gauthier-Villars.

2) Per brevità tralasciamo di trascrivere queste tavole; ritenendo sufficienti gli esempi che seguono a pag. 11-15.

3) Rowland, On the mechanical equivalent of heat, Cambridge 1880; e Appendix, containing the comparison with DR. Joules's thermometer. Il Baudin 6166 servì appunto al Rowland, per studiare il termometro di Joule.

Sentiamo qui il dovere di ringraziare pubblicamente l' illustre Prof. Rowland.



Oltre i suddetti termometri normali Tonnellot *a, b, c, d*, noi abbiamo pure impiegato, in qualche confronto secondario di termometri, un normale Baudin, N. 9771 diviso a decimi, da  $-5^{\circ}$  a  $+110^{\circ},8$ , col grado ampio  $4^{\text{mm}},8$  studiato nel 1886 dal Sig. Guillaume nel Bureau International di Sevres; e un normale N. 633, fabbricato all'osservatorio reale di Kew, e favorito gentilmente dal Chiar.mo suo direttore Sig. Wippley, termometro che fu confrontato dal prelodato Prof. Rowland a Baltimora nel 1886; infine due normali Geissler, divisi a decimi da  $-4$  a  $+102^{\circ}$ , studiati a lungo e confrontati col termometro a gaz dal Prof. Bartoli a Firenze nel 1885.

Anche per questi ultimi quattro termometri furono pure determinate le costanti fondamentali; per le correzioni dovute allo spostamento dello zero, fu fatto uno studio particolare del quale renderemo conto in una nota che farà seguito a questo lavoro <sup>1)</sup>.

Ma noi abbiamo sempre, nelle esperienze e nei confronti più importanti, impiegato i termometri normali Tonnellot, in vetro duro così bene ed accuratamente studiati; per le ragioni stesse che hanno fatto preferire tali termometri al Bureau International di Sevres.

### *Termometri calorimetrici.*

Erano quattordici costruiti dal Baudin, di Parigi, divisi in cinquantiesimi di grado, col grado ampio oltre trenta millimetri, più quattro costruiti dal fu Geissler di Bonn, ed uno del Tonnellot a centesimi, col grado ampio oltre 45 millimetri, portanti tutti lo zero, e divisi in parti di ugual capacità, (ad eccezione del Tonnellot che era diviso in parti di uguale lunghezza) <sup>2)</sup>.

Questi furono scelti fra molti altri, per modo che fossero esenti dai difetti che talvolta si riscontrano anche nei termometri di prezzo. Immersi in una massa di acqua indicavano la stessa temperatura sia che inizialmente fossero stati un poco

1) Bartoli e Stracciati, *Studi termometrici*.

2) Tutti i nostri termometri, portano inciso sull'asta il peso in grammi del mercurio, il peso del serbatoio di vetro, e il peso totale dello strumento; da questi dati, e dalla lunghezza dell'asta, si deduce facilmente l'equivalente in acqua del serbatoio, l'equivalente in acqua dell'asta dal serbatoio alla divisione zero, e l'equivalente in acqua corrispondente a ciascun grado dell'asta.

più freddi o un poco più caldi; riscaldandoli o raffreddandoli, il mercurio saliva e scendeva senza salti e con regolarità, erano affatto privi di aria, e mai la colonna si è spezzata dopo il riscaldamento; la calibrazione era buona, e le correzioni addizionali piccolissime.

I termometri come si è detto erano di fabbricazione assai anteriore al principio delle nostre esperienze per cui nel ghiaccio fondente, (dopo lunghissimo soggiorno), lo zero rimaneva costante, od almeno le variazioni mensuali dello zero a zero, erano piccolissime, (dell'ordine del millesimo di grado).

Lo zero a zero, cioè dopo lunghissimo soggiorno nel ghiaccio fondente, fu determinato annualmente; negli intervalli si ammetteva che i piccolissimi spostamenti fossero proporzionali ai tempi.

Fu determinata per ciaschedun termometro la depressione dello zero corrispondente ad ogni temperatura fra  $0^{\circ}$  e  $38^{\circ}$ ; le posizioni dello zero venendo determinate, mercè il cannocchiale munito di oculare micrometrico del catetometro costruito dal Miller di Innsbruck; la depressione corrispondente a ciascheduna temperatura veniva per ogni termometro dedotta da una curva empirica <sup>1)</sup>).

Nella tavola III abbiamo trascritto le depressioni dello zero pel termometro G (Baudin, 9160) per gli altri si veda la nota che fa seguito a questa memoria <sup>2)</sup>).

Fu pure determinato il coefficiente di pressione, servendoci degli stessi apparecchi impiegati coi termometri normali.

Riconosciuto che la calibrazione dei termometri era abbastanza buona, procedemmo al confronto diretto coi termometri normali; da questi confronti potemmo dedurre la correzione totale  $\Delta$  da apportare alle letture fatte nei nostri termometri calorimetrici per ridurle al termometro ad azoto.

1) Per determinare lo zero abbiamo sempre adoperata neve, lavata prima con acqua stillata, e poscia irrorata di acqua stillata. Compara Ch. E. Guillaume, *Traité pratique de la thermometrie de precision*, Paris 1889 pag. 118.

Pernet, *Sur la manière d'éliminer dans l'évaluation des températures, l'influence de la variation des points fixes des thermomètres a mercure.*

*Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures* t. 1, p. B. 12 e 13.

2) Bartoli e Straocchi: *Studi termometrici.*

*Termometro calorimetrico*  $+ \Delta =$  *Termometro ad azoto* (la temperatura letta sul termometro calorimetrico, essendo stata corretta per lo zero, per la pressione esterna e per la pressione interna) <sup>1)</sup>.

Questo confronto fu diligentissimo e richiese quattro anni di lavoro continuato.

Il Rowland a pag. 91 della memoria più volte da noi citata, descrive un apparecchio assai complicato per paragonare i termometri a mercurio fra loro o col termometro a gaz; ne abbiamo costruito un modello, ma non ce ne servimmo che poco, volendo noi confrontare i nostri termometri soltanto per temperature comprese fra 0° e  $+35^{\circ}$ .

Il nostro è un apparecchio gigantesco (Tavola I, fig. 1) dove la costanza quasi assoluta della temperatura si ottiene mercè la grande massa di acqua (500 litri circa) continuamente agitata da ottimi agitatori AADED.

La temperatura dell'acqua è quella stessa della sala esposta al Nord e varia solo col variare della temperatura dell'atmosfera. Una serie completa di confronti richiedeva dunque un mezzo anno, cioè dall'inverno all'estate.

Due lastre di cristallo da specchio permettevano la lettura dei termometri, la quale si faceva per mezzo dell'eccellente cannocchiale ad oculare micrometrico del catetometro Miller: (Vedasi Tavola I). Il termometro calorimetrico veniva immerso nel bagno ad acqua, insieme con tre termometri normali Tonnellot; ciascheduna lettura veniva ripetuta due volte per assicurarci della perfetta costanza della temperatura del bagno.

Nella tavola seguente (tavola I) si riporta un esempio di questi confronti.

1) Cioè la correzione  $\Delta$  è la somma delle correzioni di calibro, d'intervallo fondamentale, e di riduzione al termometro ad azoto.





## Termometro Tonnellot 4285 confrontato dal Bureau di

$$T = t + z + i + e + C + f + A$$

DATA	Pressione esterna sul bulbo	<i>t</i> tempera- tura bruta letta	<i>z</i> correzione per lo sposta- mento dello zero	<i>i</i> correzione di pres- sione interna	<i>e</i> correzione di pressione esterna	<i>C</i> correzione di calibro	<i>f</i> correzione d'inte- rvallo fonda- menta-
22 Gennaio 1887	793 <sup>m</sup> ,5	3,409	+ 0,0605	+ 0,0101	— 0,0034	— 0,0481	— 0,00
	»	2,767	+ 0,0600	+ 0,0096	»	— 0,0397	— 0,00
	»	2,628	+ 0,0600	+ 0,0095	»	— 0,0383	— 0,00
	»	2,945	+ 0,0602	+ 0,0098	»	— 0,0419	— 0,00
	»	3,400	+ 0,0605	+ 0,0101	»	— 0,0480	— 0,00
	»	3,761	+ 0,0608	+ 0,0103	»	— 0,0522	— 0,00
	»	4,235	+ 0,0613	+ 0,0107	»	— 0,0583	— 0,00
	»	4,717	+ 0,0617	+ 0,0110	»	— 0,0634	— 0,00
	»	5,229	+ 0,0622	+ 0,0114	»	— 0,0703	— 0,00
23 Gennaio	797 <sup>m</sup> ,8	5,857	+ 0,0627	+ 0,0118	— 0,0039	— 0,0766	— 0,00
	»	6,251	+ 0,0631	+ 0,0121	»	— 0,0815	— 0,00
	»	6,739	+ 0,0636	+ 0,0124	»	— 0,0884	— 0,00
	»	7,147	+ 0,0639	+ 0,0127	»	— 0,0942	— 0,00
	»	7,554	+ 0,0643	+ 0,0129	»	— 0,1005	— 0,00
	»	7,927	+ 0,0646	+ 0,0132	»	— 0,1053	— 0,00
25 Gennaio	797 <sup>m</sup> ,6	8,384	+ 0,0651	+ 0,0135	— 0,0039	— 0,1104	— 0,00
	»	8,835	+ 0,0655	+ 0,0138	»	— 0,1167	— 0,00
	»	9,346	+ 0,0659	+ 0,0141	»	— 0,1235	— 0,00
	»	9,800	+ 0,0663	+ 0,0144	»	— 0,1290	— 0,00
	»	9,146	+ 0,0666	+ 0,0140	»	— 0,1209	— 0,00



## TAVOLA I.

Termometro Tonnellot 4285 confrontato dal Bureau di Sevres										Termometro Tonnellot 4497						a cinquantiesimi calorimetrico Baudin, Termometro N. 9770 (Ω)		
$T = t + z + i + e + C + f + A$										$T' = t + z + e + A'$ essendo $A' = i + C + f + A$						$T'' = t + z + e$		
DATA	Pressione esterna sul bulbo	$t$ tempera- tura bruta letta	$z$ correzione per lo sposta- mento dello zero	$i$ correzione di pres- sione interna	$e$ correzione di pressione esterna	$C$ correzione di calibro	$f$ correzione d' inter- vallo fonda- mentale	$A$ correzione relativa al termo- metro ad azoto	$T$ temperat. ridotta al termo- metro ad azoto	Pressione esterna sul bulbo	$t$ tempera- tura bruta letta	$z$ correzione per lo sposta- mento dello zero	$e$ correzione di pres- sione esterna	$A'$ somma delle altre correzioni	$T'$ temperat. ridotta al termo- metro ad aria	$\frac{T + T'}{2}$	$T''$ temperatura bruta, corretta dello zero e della pressione esterna e interna	$\Delta =$ $\frac{T + T'}{2} - T''$
22 Gennaio 1887	793 <sup>m</sup> ,5	3,409	+ 0,0605	+ 0,0101	— 0,0034	— 0,0481	— 0,0022	— 0,0172	3,4087	793,5	3,414	+ 0,0041	— 0,0040	— 0,0051	3,4090	3,4088	3,4138	— 0,0050
	»	2,767	+ 0,0600	+ 0,0096	»	— 0,0397	— 0,0017	— 0,0140	2,7778	»	2,782	+ 0,0036	»	— 0,0017	2,7799	3,7788	3,7863	— 0,0075
	»	2,628	+ 0,0600	+ 0,0095	»	— 0,0383	— 0,0017	— 0,0133	2,6408	»	2,642	+ 0,0034	»	+ 0,0007	2,6421	2,6414	2,6484	— 0,0070
	»	2,945	+ 0,0602	+ 0,0098	»	— 0,0419	— 0,0019	— 0,0148	2,9530	»	2,954	+ 0,0037	»	+ 0,0016	2,9553	2,9541	2,9596	— 0,0055
	»	3,400	+ 0,0605	+ 0,0101	»	— 0,0480	— 0,0021	— 0,0172	3,3999	»	3,406	+ 0,0041	»	— 0,0049	3,4012	3,4006	3,4051	— 0,0045
	»	3,761	+ 0,0608	+ 0,0103	»	— 0,0522	— 0,0024	— 0,0190	3,7551	»	3,765	+ 0,0045	»	— 0,0074	3,7581	3,7565	3,7617	— 0,0052
	»	4,235	+ 0,0613	+ 0,0107	»	— 0,0583	— 0,0028	— 0,0210	4,2215	»	4,231	+ 0,0048	»	— 0,0078	4,2240	4,2227	4,2290	— 0,0063
	»	4,717	+ 0,0617	+ 0,0110	»	— 0,0634	— 0,0030	— 0,0229	4,6970	»	4,703	+ 0,0053	»	— 0,0075	4,6968	4,6969	4,7054	— 0,0085
	»	5,229	+ 0,0622	+ 0,0114	»	— 0,0703	— 0,0034	— 0,0251	5,2004	»	5,209	+ 0,0057	»	— 0,0099	5,2008	5,2006	5,2114	— 0,0108
23 Gennaio	797 <sup>m</sup> ,8	5,857	+ 0,0627	+ 0,0118	— 0,0039	— 0,0766	— 0,0037	— 0,0282	5,8191	797,8	5,833	+ 0,0063	— 0,0045	— 0,0120	5,8210	5,8200	5,8320	— 0,0120
	»	6,251	+ 0,0631	+ 0,0121	»	— 0,0815	— 0,0040	— 0,0300	6,2068	»	6,227	+ 0,0066	»	— 0,0183	6,2108	6,2088	6,2203	— 0,0115
	»	6,739	+ 0,0636	+ 0,0124	»	— 0,0884	— 0,0043	— 0,0317	6,6867	»	6,707	+ 0,0071	»	— 0,0202	6,6894	6,6876	6,6996	— 0,0120
	»	7,147	+ 0,0639	+ 0,0127	»	— 0,0942	— 0,0046	— 0,0336	7,0873	»	7,115	+ 0,0074	»	— 0,0286	7,0893	7,0883	7,1028	— 0,0145
	»	7,554	+ 0,0643	+ 0,0129	»	— 0,1005	— 0,0048	— 0,0346	7,4874	»	7,518	+ 0,0078	»	— 0,0312	7,4901	7,4888	7,5038	— 0,0150
	»	7,927	+ 0,0646	+ 0,0132	»	— 0,1053	— 0,0051	— 0,0366	7,8539	»	7,888	+ 0,0082	»	— 0,0357	7,8560	7,8550	7,8712	— 0,0162
25 Gennaio	797 <sup>m</sup> ,6	8,384	+ 0,0651	+ 0,0135	— 0,0039	— 0,1104	— 0,0054	— 0,0381	8,3048	»	8,344	+ 0,0085	»	— 0,0430	8,3050	8,3049	8,3223	— 0,0174
	»	8,835	+ 0,0655	+ 0,0138	»	— 0,1167	— 0,0057	— 0,0395	8,7485	797,6	8,794	+ 0,0090	»	— 0,0489	8,7496	8,7491	8,7672	— 0,0181
	»	9,346	+ 0,0659	+ 0,0141	»	— 0,1235	— 0,0060	— 0,0414	9,2512	»	9,300	+ 0,0094	»	— 0,0559	9,2490	9,2501	9,2679	— 0,0178
	»	9,800	+ 0,0663	+ 0,0144	»	— 0,1290	— 0,0063	— 0,0432	9,6983	»	9,758	+ 0,0099	»	— 0,0661	9,6973	9,6978	9,7108	— 0,0130
	»	9,146	+ 0,0666	+ 0,0140	»	— 0,1209	— 0,0059	— 0,0406	9,0553	»	9,100	+ 0,0092	»	— 0,0488	9,0559	9,0556	9,0724	— 0,0168

—

—

—

DA

—

2  
Gen  
18

2  
Gen

2  
Gen



Questo piccolo saggio dimostra il metodo tenuto nei nostri confronti e l'esattezza che si poteva raggiungere. Ottenuti per ciaschedun termometro calorimetrico, una diecina di valori di  $\Delta$  corrispondenti all'intervallo di mezzo grado, si prendeva la media di questi valori, e si costruiva la curva che aveva per ascisse le temperature  $T''$  lette sul termometro (e corrette dello zero, della pressione esterna e della pressione interna). Dalla curva si deduceva la tavola delle correzioni.

Noi riportiamo qui, quella delle correzioni pel termometro Baudin G (N. 9160).

# TAVOLA II.

Termometro calorimetrico +  $\Delta$  = Termometro ad azoto.

La temperatura del termometro calorimetrico essendo corretta, per lo spostamento dello zero (leggendo subito la posizione dello zero corrispondente alla temperatura letta) e dello effetto della pressione interna ed esterna.

Termometro G 9160 Baudin, a cinquantenesimi (Porta lo zero, ed è graduato da + 18° a + 29°)

$\Delta$

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
18°	— 0,033	— 0,034	— 0,036	— 0,037	— 0,038	— 0,039	— 0,040	— 0,041	— 0,042	— 0,043	18°
19°	— 0,043	— 0,044	— 0,044	— 0,044	— 0,044	— 0,044	— 0,044	— 0,043	— 0,043	— 0,042	19°
20°	— 0,042	— 0,041	— 0,041	— 0,041	— 0,040	— 0,040	— 0,040	— 0,040	— 0,040	— 0,040	20°
21°	— 0,040	— 0,041	— 0,041	— 0,041	— 0,042	— 0,042	— 0,043	— 0,044	— 0,044	— 0,045	21°
22°	— 0,045	— 0,046	— 0,047	— 0,047	— 0,048	— 0,049	— 0,049	— 0,050	— 0,051	— 0,051	22°
23°	— 0,052	— 0,053	— 0,054	— 0,055	— 0,056	— 0,057	— 0,058	— 0,060	— 0,061	— 0,061	23°
24°	— 0,061	— 0,061	— 0,060	— 0,060	— 0,060	— 0,060	— 0,060	— 0,061	— 0,061	— 0,062	24°
25°	— 0,062	— 0,063	— 0,064	— 0,063	— 0,063	— 0,063	— 0,063	— 0,063	— 0,063	— 0,063	25°
26°	— 0,063	— 0,063	— 0,063	— 0,063	— 0,064	— 0,064	— 0,064	— 0,064	— 0,064	— 0,064	26°
27°	— 0,064	— 0,064	— 0,064	— 0,064	— 0,064	— 0,063	— 0,063	— 0,063	— 0,063	— 0,064	27°
28°	— 0,064	— 0,064	— 0,065	— 0,065	— 0,066	— 0,066	— 0,067	— 0,068	— 0,068	— 0,068	28°
29°											29°

Distanza del centro del bulbo allo zero 46<sup>mm</sup>,0

» » » » » a + 18° 95<sup>mm</sup>,0

Lunghezza media di un grado 32<sup>mm</sup>,9

Coefficiente di pressione interna per millimetro 0,000 245

» » » » » per grado 0,009 610

Coefficiente di pressione del serbatoio 0,000 230

Peso del merc. 35<sup>gr</sup>,92; del serbat. 1<sup>gr</sup>,94; dell'asta (tige) 23<sup>gr</sup>,62;

Totale 61,48.

Equivalente in acqua del serbatoio e del mercurio 1<sup>gr</sup>,57; dell'asta fino a zero 0,26; dell'asta fino a + 18°; 0<sup>gr</sup>,72: di ogni grado dell'asta 0<sup>gr</sup>,32.

La posizione dello zero (a zero) era + 0°,0580 nel gennaio 1890 ed è divenuta + 0,0620 nell'aprile 1892.

### TAVOLA III.

**Tavola degli abbassamenti dello zero;  
Termometro Baudin G. (9160)**

Tempera- tura	Abbassa- mento dello zero	Tempera- tura	Abbassa- mento dello zero
0°	0,0000		
2°	0,0006	22°	0,0160
4°	0,0014	24°	0,0208
6°	0,0022	26°	0,0268
8°	0,0032	28°	0,0340
10°	0,0042	30°	0,0412
12°	0,0052	32°	0,0490
14°	0,0064	34°	0,0580
16°	0,0078	36°	0,0680
18°	0,0096		
20°	0,0124		

## II.

*Esperienze coi metalli (platino, rame, stagno, argento, piombo).*

Dell'apparecchio adoperato nelle esperienze con le palline dei diversi metalli <sup>1)</sup> si può avere una idea generale guardando la tavola II; le parti principali sono poi particolarmente rappresentate nella tav. III.

La stufa che serviva per scaldare le palline ad una temperatura di 100° (rappresentata in sezione della fig. 1 della tav. III) era di ottone a doppia parete e di dimensioni assai grandi: conteneva diversi litri di acqua, che si manteneva all'ebullizione per mezzo di un fornello a gas.

Il vapore si sollevava fino alla estremità superiore, ridiscendeva circolando per lo spazio anulare *s e*, per mezzo di grossi tubi *T* i quali servivano anche a sorreggere la stufa, appoggiando su scanalature praticate nelle grosse tavole di legno *G*, era guidato ad un serpentino (tav. II) immerso in un vaso *B* pieno di acqua fredda, dove si condensava e quindi ricadeva nella stufa. Le estremità dei tubi *T* si aprivano liberamente nell'atmosfera ed i tubi erano così larghi da impedire nel modo più sicuro, l'ingorgo dell'acqua e quindi un eventuale aumento di pressione nell'interno della stufa.

Superiormente, la stufa terminava con un largo bordo, contro il quale si adattava il coperchio, interponendo delle rotelle di piombo e stringendo per mezzo di otto robusti viti *u* (fig. 1,

1) I metalli adoperati furono Platino (procurato dalla casa Matthey di Londra) Rame del commercio, (palline grandi); Rame del commercio, (palline piccole dorate); stagno, argento, piombo.

Le palline di rame furono tornite da grossi fili di rame che si trovano in commercio; quelle di stagno, argento, piombo furono fuse entro forme, e poi pulite al tornio; lo stagno, l'argento e il piombo furono acquistati come puri dalla casa Trommsdorf di Erfurt.

Le palline, prima di essere adoperate, furono per centinaia di volte riscaldate in stufa a 100° e poscia raffreddate versandole nell'acqua fredda, nello stesso modo che dovevano essere adoperate nelle esperienze calorimetriche. Il calore specifico medio fra 100° e 15° riferito all'acqua a + 15° rimase invariato, dal principio di queste esperienze coi metalli (1883), fino alla fine (1886). L'Analisi delle palline fu fatta a lavoro compiuto dal chiarissimo Prof. Giorgio Papasogli di Firenze; i risultati sono trascritti nel seguito della presente memoria.

tav. III.) Al coperchio era saldato un tubo cilindrico che penetrava dentro la stufa e che serviva a ricevere le palline P che si dovevano scaldare. Questo tubo aveva un diametro ed una altezza uguali a circa la metà del diametro e dell'altezza della stufa e poteva contenere oltre 3 chilogrammi di palline; la sua apertura era chiusa da un grosso tappo di sughero D, attraversato da un termometro *q* il quale serviva per conoscere quando nell'interno del tubo si era raggiunta una temperatura stazionaria.

Per impedire il raffreddamento della stufa, la parte al di sopra dei tubi T era circondata da uno spesso strato di flanella, e al coperchio si sovrapponeva una specie di cappello imbottito di flanella. Così si poteva avere nell'interno del tubo che conteneva le palline una temperatura uguale a quella del vapor d'acqua che vi circolava intorno. Per gettar le palline nel calorimetro si faceva ruotare la stufa di circa  $110^\circ$  in modo che la bocca del tubo contenente le palline venisse a trovarsi vicinissima alla bocca del calorimetro, e le palline spinte dal loro peso scorrevano nel tubo e cadevano nel calorimetro: così si poteva ritenere che le palline non si raffreddassero affatto nel passaggio dalla stufa al calorimetro.

Ciò fu confermato da diverse esperienze preliminari, facendo cadere le palline entro un calorimetro contenente del petrolio bollente ad alta temperatura, mantenuto a  $+100^\circ$  da una corrente di vapore di acqua; i risultati furono nettissimi: a correzioni fatte pei termometri, il liquido a  $+100^\circ$  non si scaldava nè si raffreddava per l'immersione delle palline scaldate alla stessa temperatura.

La stufa ed il calorimetro poggiavano sopra una robusta tavola addossata ad una parete di una vasta sala, ed erano separati l'una dall'altro per mezzo di un diafragma R formato da una tavola di noce e da tre grossi cartoni rivestiti di stagnola, paralleli e distanti un centimetro l'uno dall'altro: la metà superiore di questo schermaglio era mobile e poteva sollevarsi, guidata dalle scanalature praticate nelle guide U, tirando la fune *k*, la quale passava per la gola di due pulegge attaccate al soffitto della sala.

*Calorimetro.* I calorimetri adoprati nelle nostre esperienze non differiscono essenzialmente da quelli impiegati dal Berthelot.

La fig. 2 della tav. III rappresenta, in sezione, uno dei nostri calorimetri.

C è un involucro di zinco a doppia parete, contenente una gran massa di acqua, D è un vaso cilindrico di rame argentato internamente e poco più grande del calorimetro E che vi sta dentro e ne è separato da sottili dischi di sughero. Il vaso calorimetrico era di lastra sottilissima di platino, di nichel, o di ottone e perfettamente speculare all'esterno; era coperto per impedire la evaporazione dell'acqua ed il coperchio non si apriva che un istante per lasciar cader le palline.

Nelle diverse serie di esperienze la capacità dei calorimetri ha variato da 200 centimetri cubi a 9 litri; ma, salvo le dimensioni, non vi erano differenze essenziali fra gli uni e gli altri. Importa però che il calorimetro abbia un'altezza poco più grande del diametro; con calorimetri troppo alti tendono a prodursi le correnti di aria, tutte le volte che l'acqua del calorimetro abbia una temperatura anche leggermente diversa da quella dell'ambiente. Col calorimetro a sezione grande, ci è anche il vantaggio che sollevandosi di poco il livello dell'acqua, coll'immersione del corpo caldo, si rende piccolissima la correzione per l'aumento di pressione sul bulbo del termometro.

L'agitatore ha una forma speciale, comoda, perchè serve a ricevere le palline le quali così non cadono e restano al fondo del calorimetro: è una specie di panierino (rappresentato in sezione dentro il calorimetro nella fig. 2 e in prospettiva dalla fig. 3 della tav. III) fatto della stessa lamina con la quale è fabbricato il calorimetro, ma tutta bucata; ha forma leggermente conica ed è alto un po' meno della metà dell'altezza del calorimetro: una larga lamina  $p$  dello stesso metallo è avvolta ad elica sulla superficie esterna e due lamine della stessa larghezza circondano, una la bocca e l'altra il fondo del panierino, con queste appendici l'agitatore viene ad occupare quasi tutta la larghezza del calorimetro.

Il movimento d'alto in basso all'agitatore era dato, pur stando a distanza dal calorimetro, per mezzo del filo  $f$  e della puleggia  $q$ : i due tubi  $g$  entro i quali scorrevano i fili  $a$  a ser-

vivano a guidare l'agitatore e a limitarne la corsa, in modo che non sfregasse contro le pareti del calorimetro, nè urtasse contro il termometro (il quale passava comodamente attraverso i fori *m* praticati nelle lamine che circondano il panierino) e non avesse ad uscire dall'acqua nè a battere contro il fondo del calorimetro.

Il termometro calorimetrico *b* era sostenuto da un bocciolo di ottone al quale era fissato per mezzo di un tappo di gomma spaccato in due: questo bocciolo per mezzo di un gambo e di una vite di pressione era fissato al sostegno *s*, oppure era fissato direttamente al coperchio del calorimetro.

Un termometrino *t* diviso in quinti di grado, disposto, al di fuori del calorimetro, in contatto coll'asta del termometro calorimetrico, serviva per determinare la temperatura della colonna non immersa, per far poi la correzione relativa, la quale però fu sempre piccolissima <sup>1)</sup> come può vedersi dalla tavola IV.

La lettura del termometro calorimetrico si faceva a distanza per mezzo di un ottimo cannocchiale munito di micrometro oculare, scorrevole a guisa del cannocchiale di un catetometro, lungo un'asta verticale.

Nella tavola II il cannocchiale è rappresentato di fianco all'apparecchio, ma si trovava invece di fronte; e nella parete della stanza si fece appositamente praticare, dietro il termometro, una finestra larga 20 centimetri ed alta 60, la quale si teneva chiusa da un vetro smerigliato: questo modo di illuminare il termometro rendeva nettissima la colonnina del mercurio e quindi assicurava l'esattezza della lettura, tanto più se si aveva cura di socchiudere le imposte delle altre finestre in modo da lasciare la sala in una semi-oscurità.

Le esperienze erano condotte nel modo seguente: dopo di avere messo le palline dentro la stufa, si versava l'acqua <sup>2)</sup> nel

1) Nelle esperienze calorimetriche (dice il Sig. Guillaume, *Traité de la thermométrie de précision*, pag. 193) l'elevazione totale di temperatura si produce in pochi minuti, e non sorpassa i 2 a 3 gradi; si può dunque ammettere senza errore apprezzabile, che l'asta (tige) del termometro, abbia conservato la temperatura dell'ambiente.

2) Abbiamo sempre adoperato acqua distillata ed abbiamo avuto cura di verificare che evaporata non lasciasse residuo nè s'intorbidasse per l'aggiunta di nitrato d'argento: la stessa acqua non si adoprava più di due volte e talora non più di una, come

calorimetro, vi si metteva l'agitatore e si pesava; indi si poneva a posto il calorimetro e il termometro, e dopo quattro o cinque ore si leggeva con un cannocchiale il termometro della stufa finchè questo indicasse, da mezz'ora almeno, una temperatura perfettamente costante. Allora manovrando l'agitatore e osservando il termometro, ci si accertava che l'acqua del calorimetro non variasse affatto di temperatura, ciò che accadeva quasi sempre (avendo l'acqua del calorimetro la stessa temperatura dell'aria e dell'involucro dal quale era circondato); se la temperatura variava un poco, ci assicuravamo che le piccole variazioni fossero proporzionali ai tempi, poscia si notavano le temperature di minuto in minuto per 10' e si faceva poi la correzione relativa.

Letto il termometro, si scopriva il calorimetro e mentre con la mano destra si tirava la fune  $z$  (Tav. II) per alzare lo schermaglio R, con la sinistra si dava un colpo alla leva E per liberare i tubi T della stufa, quindi si alzava il paniere agitatore, ma senza farlo uscire dal liquido, e con l'altra mano si scopriva la stufa e si rovesciava: così le palline cadevano dentro il panierino. Ricondotta a posto la stufa e lo schermaglio R, si copriva il calorimetro e per mezzo del filo  $f$  si muoveva l'agitatore e con l'occhio si leggeva al cannocchiale osservando il movimento ascendente del termometro: — questa manovra con la pratica acquistata non richiedeva più di 10 secondi.

nella serie di esperienze con le palline di piombo. Abbiamo così impiegato in queste esperienze molte diecine di ettolitri di acqua distillata.

Teniamo poi molto a far conoscere (quantunque ciò a prima vista possa sembrare ozioso) che l'acqua adoperata in tutte quante le nostre esperienze era sempre stata distillata da più mesi e mantenuta in damigiane che avevano da molti anni servito a conservare l'acqua stillata. Le damigiane le tenevamo in un angolo oscuro della sala stessa del calorimetro e della bilancia: l'acqua si versava nel calorimetro senza che in nessun caso avesse mai subito altra variazione di temperatura che quella dovuta alle piccole oscillazioni termometriche dell'ambiente.

Uno di noi, nella memoria *sulla corrente residua e sulla costituzione degli elettroliti*, Pisa 1882, Nuovo Cimento T. XI pag. 193, ha sviluppato a lungo un'ipotesi da cui deriverebbe che molte proprietà fisiche degli elettroliti possono dipendere dalla loro storia precedente. Anche il compianto fisico G. A. Hirn, nella sua pregevole memoria, *sulle variazioni della capacità calorifica dell'acqua verso il massimo di densità*, Comptes Rendus, t. LXX, 21 marzo 1870 scriveva: “ Ne se peut-il pas qu'un même corps, qu'une même masse d'eau, par exemple, recevant une même quantité de chaleur, pronne des températures différentes selon la manière dont se fait l'addition de chaleur ? ”



Si notava la più alta temperatura indicata dal termometro, la quale succedeva un minuto dopo gettate le palline nel calorimetro, e quindi, sempre agitando, si leggeva il termometro di minuto in minuto per 10': queste osservazioni servivano per calcolare la correzione.

Nelle nostre esperienze gli abbassamenti di temperatura dopo l'istante in cui fu raggiunto il maximum, riuscivano ben proporzionali ai tempi.

Dopo terminata una esperienza si toglievano subito le palline dal panierino, si asciugavano con carta da filtro e quindi si scaldavano in una stufa ad aria alla temperatura di 100° e poi si ponevano di nuovo (così calde) nella stufa a vapore per preparare una nuova esperienza.

La stufa a vapore era mantenuta continuamente in azione (oltre 16 ore al giorno) per essere sicuri di ottenere un regime permanente di temperatura, così nella stufa come nell'acqua del calorimetro e nella sala: l'acqua stillata che serviva per le esperienze era conservata nella sala stessa delle esperienze, dove pure era collocata la bilancia per determinare il peso dell'acqua.

Immediatamente prima di ogni esperienza si leggeva il barometro per calcolare la temperatura di ebullizione dell'acqua della stufa ossia la temperatura iniziale delle palline.

Il barometro che abbiamo sempre adoprato, durante tutte queste esperienze, era a mercurio, del sistema Fortin, costruito dal Deleuil di Parigi, riempito, poco prima di cominciare queste esperienze, e confrontato a lungo col barometro normale del R. osservatorio dell'Istituto superiore di Firenze e con un barometro normale da noi costruito: la correzione da applicare al nostro barometro per ridurlo a coincidere con quello normale era  $+ 0^{\text{mm}},06$ .

Il barometro era collocato in una piccola stanza a Nord, (situata allo stesso piano) in cui le oscillazioni diurne di temperatura erano assai piccole.

Le bilance adoperate per pesare i calorimetri e le palline furono due: una grande, del Deleuil, della portata di 10 chilogrammi, adoprata specialmente pei grandi calorimetri, l'altra del Sartorius, della portata di cinquanta chilogrammi.

Le pesiere furono verificate, fino a due chilogrammi, impie-

gando una eccellente bilancia di Sartorius. sensibile fino al decimo di milligrammo; quanto ai pesi maggiori, furono confrontati per mezzo della grande bilancia di Deleuil.

Le correzioni relative da applicare ai singoli pesi erano inferiori al centigrammo sicchè non se ne tenne conto, perchè ci bastava conoscere il peso dell'acqua a meno di un centigrammo.

Facemmo anche il confronto del chilogrammo della nostra pesiera (al quale si erano riferiti gli altri pesi) col chilogrammo campione fornitoci dal Rueprecht il quale alla sua volta era stato confrontato dal compianto Prof. Pisati col chilogrammo in platino dell'ufficio centrale dei pesi e misure <sup>1)</sup>. Ma non tenemmo conto della differenza che era ben piccola, anche perchè nei nostri calcoli figura sempre il rapporto di due pesi e quindi il fattore di correzione viene a eliminarsi; l'importante era per noi di esser certi dello errore relativo dei nostri pesi e questo era, come abbiamo detto, inferiore agli errori compatibili con le nostre esperienze.

(*Continua*).

## SULLE PROPRIETÀ TERMICHE DEI VAPORI; MEMORIA DI ANGELO BATTELLI <sup>2)</sup>

### II. — *Esperienze sull'acqua.*

#### Descrizione dell'apparecchio per l'acqua.

L'apparecchio adoperato per le esperienze sull'acqua è analogo nel concetto al precedente, con le sole modificazioni che ho dovuto arrecarvi per resistere a pressioni molto più forti e per evitare l'azione decompositrice dell'acqua ad elevatissime temperature.

1) Questo contronto fu fatto, avendo noi in mira di riprendere la determinazione dell'equivalente meccanico del calore, col metodo già adoperato da uno di noi. (Bartoli, Nuovo Cimento t. VIII, Pisa 1880; ed Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. VIII, pag. 67.

2) *Continuazione e fine* vedi pag. 156 del volume precedente.

1.<sup>o</sup> *Campanella*. — La campanella era costituita da una canna di acciaio lunga 30 centimetri, del diametro interno di 8 millimetri e del diametro esterno di 16 millimetri. Essa era chiusa ad una estremità, e portava all'altra estremità un ingrossamento della lunghezza di 3 centimetri, nell'interno del quale era intagliata una madrevite micrometrica. In questa madrevite si adattava perfettamente la vite praticata sulla superficie di un'altra canna d'acciaio del diametro interno di 4 millimetri. Quest'ultima canna era piegata ad angolo retto; di cui un lato era lungo 5 centimetri e portava la vite micrometrica. L'altro lato era lungo 40 centimetri e terminava in un allargamento della lunghezza di 3 centimetri, nell'interno del quale era scavata un'altra madrevite micrometrica.

Finalmente anche in questa madrevite si adattava perfettamente la vite praticata nell'estremità di una terza canna d'acciaio piegata ad angolo retto, di cui il primo lato era lungo 20 e il secondo 10 centimetri. L'estremità di questo secondo lato della canna si allargava in un cilindro lungo 5 centimetri, del diametro interno di circa 3 centimetri e mezzo, ed esterno di 5 circa, per mezzo del quale si doveva poi stabilire la comunicazione con la parte dell'apparecchio che doveva servire a misurare il volume occupato dal vapore dentro la campanella. L'insieme delle tre canne avvitate a loro posto, si vede nella fig. 2.

Le canne m'arrivarono dalla fabbrica meccanicamente pulite nell'interno; io le lavai anzitutto con alcool bollente, poi con acqua distillata; quindi con potassa bollente, con acqua distillata, e infine con alcool. Infine vi agitai dentro per lunghissimo tempo del mercurio puro.

Non era poi da temere ad altissime temperature un'azione dell'acqua sull'acciaio, poichè il Nadeydine <sup>1)</sup> ottenne gli stessi risultati con tubi d'acciaio puliti e con tubi d'acciaio indorati.

Una grave difficoltà consisteva nel riempire le canne di mercurio, scacciandone tutta l'aria; e poi introdurre nella campanella l'acqua, di cui si voleva studiare il vapore. Credo di essere riuscito bene nell'intento, procedendo nel modo che segue. Alla campanella adattai un tubo di vetro alquanto più

1) *Loc. cit.*

largo, per mezzo di una specie di anello che formai con amianto, premendolo fortemente fra le pareti della canna e del tubo, in modo da tenere il mercurio. Indi riempii totalmente la campanella e il tubo di vetro con mercurio purissimo (distillato due volte) e ve lo feci dentro bollire ripetutamente. Allora capovolsi il tubo in un pozzetto profondo pieno di mercurio purissimo come il precedente, e togliendo a poco a poco delicatamente l'amianto per mezzo di pinzette pulitissime, staccai il tubo di vetro dalla campanella, mantenendo sempre questa colla bocca immersa nel mercurio. Indi introdussi l'acqua nella campanella stessa, in boccette preparate e pulite come quelle che servirono per le esperienze sopra il solfuro di carbonio.

Intanto riempii di mercurio anche le due canne, dopo averle avvitate insieme e dopo aver chiusa l'estremità della più corta *b* con un tappo di ferro, munito di un anello di amianto, in modo da tenere abbastanza bene il mercurio. Quindi produssi l'ebollizione del mercurio stesso, e infine tuffai le due canne in una vasca di lamina di ferro lunga e stretta, piena di mercurio purissimo e quasi bollente, tenendovele immerse per mezzo di due pinze pulitissime, in guisa che le due estremità rimanessero coperte dal liquido. Allora tolsi delicatamente a poco a poco l'anello di amianto e il tappo di ferro; con un pennello di fili di ferro, puliti prima meccanicamente e poi sbattuti a lungo dentro il mercurio, fu strofinata la vite che doveva penetrare nella madrevite della campanella, e da ultimo, per eccesso di precauzione, fu prodotta con una lampada l'ebollizione del mercurio nel punto della vasca ove trovavasi la vite.

Quindi fu trasportata dal pozzetto nella vasca la campanella colla bocca sempre immersa nel mercurio contenuto in una piccola capsula; e fu avvitata alla canna d'acciaio mentre la vite e la madrevite si mantenevano sotto il mercurio. Prima di stringere del tutto la vite, fu tolto l'apparecchio dalla vasca e fu introdotto fra la testa della vite e l'orlo della bocca della madrevite un anello di grosso cuoio, il quale era stato tagliato da una parte per esser messo a posto; ma siffatto taglio, praticato obliquamente, non poteva recare alcun danno, dopo averne posti i labbri a combaciare. Un anello simile di cuoio fu poscia inserito anche nella congiunzione fra le due canne precedenti.

La campanella e le canne, insieme alle rotelle di cuoio, erano state pesate quando erano vuote; furono poi ripesate piene (arrivando il mercurio fino presso alla madre vite della canna estrema); avevo inoltre il peso delle boccette piene d'acqua; quindi io potevo calcolare il peso del mercurio che avevo introdotto nell'apparecchio.

Allora fu congiunta l'estremità aperta della canna all'appendice, che doveva servire a valutare il volume occupato dal vapore d'acqua nella campanella. Tale appendice consisteva in un tubo di vetro del diametro di poco meno di 2, 5 millim., dello spessore di 5 millimetri, e della lunghezza di m. 2, 20, a cui era unita una scala graduata.

Un'altra difficoltà non lieve che incontrai si fu quella di stabilire la congiunzione fra la canna d'acciaio e il tubo di vetro, in modo che non lasciasse trapelare il mercurio alle pressioni più alte che dovevo raggiungere. Dopo parecchi tentativi infruttuosi, ottenni buonissimi risultati dal sistema seguente. Sulla base forata del cilindro *c* in cui terminava la canna, adagiavi una spessa rotella di cuoio ben pulito e su di essa appoggiavi l'estremità del tubo; nella quale estremità, ancor prima di fare la calibrazione del tubo stesso, era stato prodotto un ispessimento, fondendo l'orlo e premendolo sopra una lastra di vetro, per modo che l'estremità prendesse una forma conica allargantesi verso la bocca, rimanendo però i labbri della bocca regolarissimi. Dopo di ciò collocai sopra la rotella precedente altre quattro rotelle di cuoio molto duro, in modo che gli orli esterni ed interni di esse si adattassero perfettamente alle superficie rispettive della canna e del tubo, muovendosi fra di queste a sfregamento molto duro. Quindi introdussi al disopra delle rotelle un tappo cilindrico di guttapercha indurita, il quale entrava a forza, premendo contro le pareti dell'acciaio e del vetro. Finalmente per mezzo di una vite che si moveva nella madre vite scavata nell'estremità del cilindro *c*, esercitavo una fortissima compressione sopra il tappo, il quale schiacciava le rotelle di cuoio e spingeva in basso il tubo, che andava a conficcarsi nella rotella su cui era appoggiato.

Infine introdussi nuovo mercurio nell'apparecchio, in modo che alla temperatura ordinaria esso arrivasse ad occupare l'al-

tezza di qualche centimetro nel tubo di vetro. A tal uopo riscaldai le canne *a* e *b* finchè il mercurio comparisse nel tubo, e con scosse e con successivi riscaldamenti del cilindro *c* mi assicurai che non rimanessero nell'interno bollicine d'aria, che poi alla temperatura ordinaria potessero occupare un volume sensibile, tanto da essere trascinate dalla colonna scorrevole di mercurio. Quindi feci discendere un po' di mercurio caldo dalla sommità del tubo, scacciando poi con leggero riscaldamento l'aria che aveva trascinato seco. Da ultimo dedussi il peso del mercurio versato, ripesando la capsula dalla quale era stato tolto.

In tal guisa io avevo nell'apparecchio una quantità nota di mercurio; il quale, allorchè il vapore si produceva nella campanella, s'innalzava nel tubo di vetro graduato; cosicchè leggendo l'altezza a cui esso si portava nel tubo stesso, calcolando la sua dilatazione per effetto dell'aumento di temperatura e la sua diminuzione di volume per effetto della pressione, e calcolando la dilatazione della campanella, delle canne e del tubo per effetto della temperatura e della pressione, io potevo dedurre facilmente e con bastante approssimazione, come si vedrà, il volume occupato dal vapor d'acqua nella campanella.

2.° *Stufa*. — Uno degli inciampi pel buon esito di queste esperienze era pure quello di ottenere temperature che potessero arrivare fino a circa 400° C., colla possibilità di produrre in esse piccole variazioni a piacimento, e di mantenerle a lungo costanti.

Riuscii nell'intento generando l'ebollizione del mercurio sotto pressioni differenti. In una di quelle bottiglie di ferro in cui si fa viaggiare il mercurio, dell'altezza di 38 centimetri e del diametro di 12 centimetri, introdussi la campanella d'acciaio dal disotto, praticando un foro nel mezzo del fondo della bottiglia. In questo foro fu scavata una madre vite micrometrica, il cui maschio fu scolpito sulla superficie della campanella, verso l'estremità inferiore fino al punto di congiunzione colla canna *a*.

Così tutta la campanella rimaneva contenuta nella bottiglia, e la chiusura nel luogo del passaggio della campanella stessa era assai buona per tenere il mercurio, anche sotto pressione di parecchie atmosfere.

La bocca della bottiglia larga 5 cm. circa, fu chiusa con un tappo di ferro di forma cilindrica, introdotto a vite, il quale

sporgeva al disopra della bottiglia di circa 4 cm. (fig. 2). Anche nella parte sporgente, il tappo portava scolpita sulla superficie laterale una vite, mentrechè nel mezzo era attraversato da una cavità cilindrica del diametro di poco più di due cm. e lunga poco più di quattro. Essa era chiusa in fondo da una robusta parete che portava nel centro un foro di forma conica, colla base superiore di 6 mm. e colla base inferiore di 3; il quale metteva in comunicazione la cavità del tappo con l'interno della bottiglia. Lungo le pareti interne della cavità (la quale superiormente era aperta) poteva scorrere un tubo  $t$  di ferro, di grosse pareti, chiuso al disopra e aperto di sotto, il quale portava una molla robusta  $m$  di acciaio, a cui era congiunta la valvola  $V$  pure di acciaio, che si adattava perfettamente nel foro conico della base del tappo.

Alla vite scolpita sulle pareti del tappo s'innestava la madre vite scavata nell'estremità interna di una canna  $c$  di ferro, lunga 40 cm., la quale poi era chiusa superiormente da uno spesso coperchio  $p$  cementato all'orlo della canna; cosicchè questa era solidamente congiunta alla bottiglia di ferro e veniva a coprirne la bocca con un cappello cilindrico chiuso da tutte le parti. Nel mezzo del coperchio  $p$  era praticata una madre vite, in cui si adattava la vite  $d$  incisa sull'asta  $a$  di ferro, che poi superiormente terminava in un bottone e inferiormente era congiunta al tubo  $t$ .

L'interno della bottiglia era occupato fino ad una certa altezza da mercurio, che si poteva riscaldare mediante due fiamme annulari che circondavano la bottiglia, l'una verso il fondo, l'altra verso la metà.

Per tal modo il mercurio riscaldato nella bottiglia, produceva vapori che esercitavano una pressione sul liquido, come nella pentola di Papin, ed aprivano la valvola quando la pressione aveva raggiunto un determinato valore dipendente dalla tensione della molla d'acciaio: allora il mercurio si poneva a bollire producendo nell'interno una temperatura costante. Per conseguenza, secondo che io girava in un senso o nell'altro la vite  $d$  che muoveva il tubo  $t$ , e quindi aumentavo o diminuivo lo sforzo della molla sulla valvola, io potevo produrre nella bottiglia una temperatura costante diversa.

Il vapore del mercurio bollente, uscendo per il foro della valvola, ed entrando nella canna *c*, veniva di nuovo condensato, perchè la canna era circondata da un refrigerante *t*, in cui circolava di continuo acqua fredda. Il mercurio liquido, che così veniva formato, si raccoglieva in una specie di vasca *g* a forma di anello, fissata tutt'intorno alla parete della canna, un poco più in alto dell'orlo del tappo di ferro.

Vennero fatte esperienze anche a temperature più basse di quella dell'ebollizione del mercurio, adoperando due petroli, di cui l'uno bolliva a  $311^{\circ},2$  e l'altro a  $333^{\circ},6$  C.

Per misurare la temperatura dell'interno della stufa adoperai dapprincipio dei termometri la cui sostanza termometrica era l'aria; e che mi davano con sufficiente sicurezza il  $\frac{1}{10}$  di grado. Però, quando nella stufa cominciò ad essere piuttosto forte la pressione esercitata dal vapore di mercurio, non mi fu più possibile ottenere una buona chiusura del foro in cui passava il cannello del termometro, ad onta di tutti gli sforzi per riuscire nell'intento. Il cemento formato con scagliola impastata con acqua e bianco d'uovo, oppure la bambagia ben impastata con minio e biacca in parti uguali, che chiudono bene a pressione ordinaria, non servono più se si aumenta la pressione di qualche atmosfera. Per conseguenza fui costretto a ricorrere ad una coppia termoelettrica, avendo trovato il modo di ottenere una perfetta chiusura nel luogo del passaggio dei fili metallici.

Ciascuno di questi fili si faceva passare per un foro del diametro di circa 2 millimetri, il quale attraversava un tappo conico di ferro del diametro di un centimetro appena e della lunghezza di 3 cm. Il filo veniva immasticato nel foro mediante una pasta formata con 30 parti circa in peso di limatura di ferro, 2 parti di sale ammoniaco, ed una parte di fiore di zolfo finissimo; la quale veniva versata caldissima nel foro e compressa fortemente nel tempo stesso che anche il filo ed il tappo erano portati ad alta temperatura.

Onde poi la congiunzione fosse più solida, riempivo superiormente un piccolo tratto del foro (per la lunghezza di 4 o 5 mm.) con ottone fuso, mentre il filo ed il tappo venivano scaldati al calor rosso; e inferiormente riempivo un altro piccolo tratto con scagliola impastata con bianco d'uovo.



Questo medesimo tappo veniva rivestito di uno strato uniforme di 2 o 3 mm. d'altezza, formato con sottile cordicella di amianto ad esso strettamente legata; e poi veniva introdotto a forza in una canna conica d'acciaio della medesima forma, e del diametro interno alquanto maggiore del diametro del tappo. Sulla superficie laterale esterna della canna era scolpita una vite micrometrica, che si innestava nella madre vite scavata nello spessore del coperchio della stufa.

Le due canne portanti i due fili venivano avvitate da parti opposte del coperchio, perchè i fili non corressero pericolo di toccarsi nell'interno; nel mentre che la saldatura era legata alla campanella di ferro, ed isolata da essa per mezzo d'un cuscinetto d'amianto.

I due metalli costituenti la coppia termoelettrica erano ferro e nickel. Prima di adoperare il filo di nickel mi assicurai che non venisse amalgamato dal mercurio bollente. Ed osservatolo infatti anche dopo finite le esperienze, non vi si riscontrò nessuna traccia di amalgamazione.

La coppia fu graduata con tutte le cure, avuto specialmente riguardo al comportamento termoelettrico irregolare del nickel.

Durante le esperienze sul vapore d'acqua la coppia fu tenuta sempre con la seconda estremità nei vapori di solfo bollente.

3.<sup>o</sup> *Apparecchio generatore delle pressioni.* — Per generare le pressioni fu adoperato lo stesso sistema scelto per le esperienze sul solfuro di carbonio, colla sola differenza che fu cambiato il recipiente in cui si faceva dilatare l'etere.

Due robustissime sfere di bronzo S ed S' del diametro interno di 8 cm. circa comunicavano fra loro per mezzo di una canna verticale d'acciaio c, a cui erano avvitate con vite micrometrica. La sfera S era inoltre superiormente avvitata ad un'altra canna c' che si ripiegava orizzontalmente; e la sfera S' era inferiormente avvitata ad una terza canna c'', lunga circa un metro, che si piegava due volte ad angolo retto, e il cui ramo verticale metteva in una terza sfera di ferro S''. La estremità libera della canna c' portava una vite micrometrica, a cui si poteva avvitare, come si vedrà, un pezzo di ferro portante un manometro, o un tappo di chiusura. Infine la sfera S'' portava

incisa nella sua bocca superiore una madre vite nella quale s'innestava poi il tubo manometrico per misurare le pressioni esercitate nell'interno della campanella. La canna  $c'$  e la sfera  $S''$  erano state accuratamente pulite col sistema già sopra descritto.

Dalla bocca della sfera  $S''$  fu introdotto del mercurio caldo nell'apparecchio, e vi fu fatto bollire ripetutamente; quindi inclinando dolcemente l'apparecchio stesso, si versò dell'etere dall'estremità del cannello  $c'$ , fino a riempirlo totalmente: e da ultimo fu fatto bollire l'etere per scacciare l'aria che poteva essere rimasta aderente alle pareti.

4.° *Manometro*. — Anche in queste esperienze il manometro era ad aria compressa ed aveva una sensibilità sufficiente, poichè in vicinanza della pressione critica (a quasi 200 atmosfere) dava chiaro indizio di un mutamento di 7, o 8 cm. di mercurio; ed anche alle pressioni più alte a cui arrivai, esso sentiva una variazione dai 25 ai 30 cm. di mercurio.

Un tubo di vetro  $r$  dal foro capillare e dalle pareti grossissime, lungo m. 1,35, era congiunto da una parte con un corto cilindro di ferro  $g$  e dall'altra con un tubo di ferro  $t$  piegato ad angolo retto, il quale alle due estremità si allargava in due bocche del diametro circa di 1,5 cm. mentre in tutto il resto aveva il diametro di circa 3,5 mm.; i suoi tre rami erano tutti della lunghezza di 5 cm. circa.

Le congiunzioni erano fatte collo stesso sistema, già descritto con cui si unì il cannello di vetro  $l$  lungo m. 2,20 alla canna di acciaio  $b$  (fig. 2) direttamente comunicante con la campanella.

Il cilindro di ferro  $g$  finiva all'estremità libera in una vite micrometrica che si adattava nella madre vite scavata nella bocca della sfera  $S''$ : e il tubo di ferro  $t$  venne congiunto alla seconda estremità col cannello di vetro  $l$  della fig. 2 usando sempre il sistema descritto.

Per tal modo la campanella contenente il vapor d'acqua, era in diretta corrispondenza con l'apparato generatore della pressione, per mezzo delle canne  $a$  e  $b$ , del cannello  $l$  e del tubo  $r$ .

Il cannello  $l$ , come si è detto, era stato calibrato rispetto alla scala che gli era congiunta; una scala simile era stata cementata al tubo  $r$ , e rispetto ad essa era stata fatta la calibra-

zione del tubo, prima di unirlo al resto dell'apparecchio, riducendo i volumi osservati a 0°. Nello stesso tempo si era misurato il volume del tubo  $t$ , per tutto il tratto in cui aveva il diametro interno di 3 mm., ossia fra i due allargamenti in cui dovevansi innestare il cannello  $l$  e il tubo  $r$ , riempiendo il tratto medesimo con mercurio tolto da un bicchiere di tal liquido pesante. Perciò era facile calcolare il volume occupato dall'aria fra due punti qualunque del cannello  $l$  e del tubo  $r$ .

Onde poter conoscere con esattezza la temperatura del manometro, il cannello  $l$  e il tubo  $r$  furono circondati da due bagni, che arrivavano sin quasi alla sommità del manometro, e che comunicavano in alto e a metà fra di loro. I due bagni erano costituiti da due prismi a base rettangolare, formati con striscie di vetro sostenute da spigoli di legno, e congiunte l'una all'altra con un mastice da vetraio. Questi bagni si potevano facilmente togliere e mettere a loro posto, staccando o fissando di nuovo le striscie appartenenti ad una faccia di ciascun prisma. In essi si mantenne acqua che possibilmente fosse a 16° C. all'incirca: del resto un termometro immerso in ciascuno ce ne dava la temperatura.

Per coefficiente di dilatazione termica del vetro ho preso il numero 0,0000218, e per coefficiente di espansione dei tubi: 0,00002 riferito alla pressione di un'atmosfera; come avevo già fatto per i tubi di vetro usati nelle esperienze sopra il solfuro di carbonio.

Per avere dal manometro la misura della pressione esercitata sul vapore d'acqua, ricercai anzitutto quale pressione fosse necessaria per far comparire il mercurio nel tubo  $r$ .

Così io conoscevo il volume  $v$  dell'aria e la sua temperatura  $t$ , sotto la pressione  $p$ ; quando in seguito venne chiusa coll'apposito tappo l'estremità dell'apparato di compressione, se poi in una data esperienza sul vapor d'acqua si trovò uguale a  $v'$  il volume dell'aria nel manometro, essendo  $t'$  la sua temperatura, la pressione esercitata sullo stesso vapore, doveva essere uguale a

$$p' = \frac{1 + \alpha t'}{1 + \alpha t} \frac{pv}{v'} \frac{r}{r'} - \theta$$

dove  $r$  è il rapporto ricavato dalle tabelle di Amagat, tra il prodotto  $p v$  spettante alla pressione di 1447 mm. e il prodotto  $p'' v''$  che alla medesima temperatura spetterebbe alla pressione di 760 mm.;  $r'$  è l'analogo rapporto  $\frac{p' v'}{p'' v''}$  riferentesi alla suddetta esperienza sopra il vapor d'acqua; e  $\theta$  è la tensione del vapore di mercurio alla temperatura a cui trovavasi la campanella.

*Procedimento delle esperienze.* — Come nelle esperienze sopra il solfuro di carbonio, cominciavo coll'accendere la lampada sotto l'apparato di compressione; e procedevo quindi in tutte le determinazioni nella stessa maniera d'allora.

Per le misure delle pressioni non si avevano che da leggere le posizioni dei due menischi del mercurio nel tubo  $n$  e nel cannello  $l$ ; o più spesso nel solo cannello  $l$ ; e a questo attendeva una persona, la quale seguiva continuamente col cannocchiale i movimenti delle colonne di mercurio, e corrispondentemente regolava le diverse parti dell'apparato di compressione, un'altra persona attendeva all'andamento della temperatura della campanella.

Finita una serie di misure, cominciavo ad abbassare a poco a poco la lampada dell'apparato di compressione, onde la pressione diminuisse lentissimamente, finchè la seconda colonna di mercurio fosse entrata tutta quanta nel tubo  $r$ : allora spegnevo tutte le lampade, anche attorno alla stufa.

Il termine di ciascuna serie di misure mi era segnato, o dall'osservare quasi assoluta costanza della pressione al diminuire del volume, o dall'avere raggiunta una pressione che stimavo molto al di là della pressione critica. — Per ciascuna serie descrivevo una curva isotermica del vapore: e secondo che essa m'indicava o no liquefazione della sostanza, sceglievo la temperatura per una serie successiva. — Così sono riuscito a chiudere l'isotermica spettante alla temperatura critica fra due altre isotermitiche discoste di  $\frac{1}{10}$  di grado l'una dall'altra.

*Purità dell'acqua adoperata.* — L'acqua era purissima e perfettamente disaerata. Il procedimento adoperato per ottenerla, che consistette essenzialmente nel farne molte volte la distillazione nel vuoto, sarà descritto in una prossima Memoria sopra

il comportamento dell'acqua rispetto alle leggi di Boyle e Gay-Lussac, di cui le esperienze sono ora in corso.

Nella stessa Memoria dirò dei mezzi adoperati per assicurarmi d'aver raggiunto l'intento, e in qual modo riempi le boccette senza pericolo che il liquido venisse a contatto dell'aria.

*Risultati delle esperienze.* — Coi risultati delle presenti esperienze ho descritto le isoterme che si trovano nella tavola annessa. Esse sono distribuite in diversi gruppi, come quelle del solfuro di carbonio.

Per le isoterme spettanti alle temperature più basse:  $311^{\circ}2$  e  $333^{\circ}6$ , l'origine dei volumi è  $0^{\text{cc}}$ , e quella delle pressioni 70,000 mm. di mercurio; e 1 mm. sulle ascisse rappresenta  $\frac{1}{10}$  di centimetro cubo, e sulle ordinate la pressione di 250 mm. Le curve di questo gruppo sono trasportate d'un mezzo centimetro verso destra.

Per il secondo gruppo di isoterme (da  $358^{\circ}7$  a  $363^{\circ}8$ ), l'origine dei volumi è ancora  $0^{\text{cc}}$ ; e quella delle ordinate è 134.000 mm. di mercurio: e 1 mm. nelle ascisse rappresenta  $\frac{1}{10}$  di cent. cub. e sulle ordinate la pressione di 100 mm.

Anche le curve di questo gruppo sono state trasportate di mezzo centimetro verso destra. Per il terzo gruppo (da  $364^{\circ}0$  a  $365^{\circ}1$ ) l'origine dei volumi è  $1^{\text{cc}}$ , e quello delle ordinate 145,000 mm. di mercurio; e 1 mm. nelle ascisse rappresenta  $\frac{1}{10}$  di cent. cub. e nelle ordinate la pressione di 50 mm. Il gruppo è stato trasportato, come i precedenti, di mezzo centimetro verso destra.

Finalmente pel quarto gruppo (da  $366^{\circ}8$  in poi) l'origine dei volumi è  $2^{\text{cc}}$ , e quella delle ordinate 150,000 mm. di mercurio; e ogni millimetro nelle ascisse rappresenta  $\frac{1}{10}$  di cent. cub., e nelle ordinate la pressione di 200 mm. Le curve di questo gruppo sono state trasportate di un centimetro e mezzo verso sinistra.

Osservando bene queste isoterme si scorge che a  $364^{\circ}2$  v'ha ancora un piccolo indizio di condensazione del vapore, ma a  $364^{\circ}3$  tale indizio pare scomparso; l'isoterma  $364^{\circ}5$  appartiene poi certamente tutta quanta allo stato di vapore. Perciò credo che sia da assumere come temperatura critica dell'acqua:

364°,3. Considerando quindi nelle successive isoterme il punto in cui va sparando il tratto orizzontale, si può assegnare alla pressione critica il valore di 147900 mm. — 194,61 atm.; e al volume critico quello di 4,<sup>cc</sup> 812 per un gramma di sostanza.

Il volume critico, quale era stato determinato da Nadeyding, era molto lontano dal vero.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università di Cagliari,  
81 Maggio 1890.



CONSIDERAZIONI SULLA TEORIA MATEMATICA DEL MAGNETISMO;  
MEMORIA DEL PROF. EUGENIO BELTRAMI <sup>1)</sup>.

§ 15. La dimostrazione precedente, messa a fronte di quella del § 13, dà luogo ad alcune osservazioni.

E primieramente apparisce (18), che la condizione necessaria e sufficiente per poter concludere da quella che la differenza di due soluzioni  $U$  dev'essere nulla, è che la quadratica  $\Phi(U)$  (18) sia dovunque positiva (come è già, per definizione, in ogni punto esterno al corpo  $S$ ). Ora ciò avviene senza dubbio quando è positiva la quadratica  $\Psi(U)$ , che è quanto dire l'antica  $\psi$ , ma potrebbe anche avvenire senza che questa fosse tale. Quindi la precedente dimostrazione stabilisce l'unicità di soluzione in condizioni più larghe che non fossero quelle sotto le quali tale proprietà venne stabilita nel § 13.

In realtà però si può modificare la deduzione fatta in quest'ultimo paragrafo, per guisa da giungere alla medesima conclusione. Basta infatti trascrivere l'espressione (14) nella forma:

$$P(V) = \frac{1}{8\pi} \int \Delta_1 V dS' + \frac{1}{4\pi} \int \left( \frac{\Delta_1 V}{2} + 4\pi\psi \right) dS,$$

dove  $S'$  rappresenta tutto lo spazio escluso del corpo  $S$ , ed osservare che, per la positività di quest'espressione, è sufficiente quella di

$$\frac{\Delta_1 V}{2} + 4\pi\psi(m_a, m_b, m_c)$$

1) *Continuazione*. V. pag. 209 del volume precedente.

in ogni punto di  $S$ . Ora, nei riguardi della dimostrazione da darsi, questa espressione equivale a

$$\frac{\Delta_1 V}{2} + 4\pi\Psi\left(\frac{dV}{da}, \frac{dV}{db}, \frac{dV}{dc}\right),$$

giacchè, per l'ipotesi  $V_0 = 0$  dovrebbero sussistere (17)<sub>a</sub> le relazioni

$$m_a = -\Psi'\left(\frac{dV}{da}\right), \text{ etc.},$$

e questa seconda espressione quadratica non è (18) altro che  $\Phi(V)$ . Dunque, rinunciando alla primitiva ipotesi della necessaria positività di  $\psi$ , e conservando soltanto quella della positività di  $P(V)$ , si giungerebbe egualmente alla conclusione più generale di cui s'è detto.

Or qui si presenta una circostanza singolare, la quale vien messa più chiaramente in rilievo quando si assuma la quadratica  $\psi$  in forma canonica, cioè quando si ponga

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \frac{m_a^2}{\kappa_a} + \frac{m_b^2}{\kappa_b} + \frac{m_c^2}{\kappa_c} \right).$$

La riduzione di  $\psi$  a questa forma può essere fatta con una conveniente scelta d'assi *fissi*, se i coefficienti di  $\psi$  sono *costanti*, od anche se, essendo questi *variabili*, il corpo  $S$  possiede tre assi ortogonali fissi di simmetria magnetica; ma può, in ogni caso, concepirsi effettuata per ciascun punto di  $S$  in particolare. Le quantità (senza dimensione)  $\kappa_a, \kappa_b, \kappa_c$  sono i cosiddetti *coefficienti di suscettibilità*, secondo i tre assi, nel primo caso, e secondo tre determinate direzioni ortogonali *variabili* da punto a punto, nel secondo. La funzione reciproca  $\Psi$  è data, in queste ipotesi, da

$$\Psi(U) = \frac{1}{2} \left\{ \kappa_x \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 + \kappa_y \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 + \kappa_z \left( \frac{dU}{dz} \right)^2 \right\}$$

e si ha quindi

$$\Phi(U) = \frac{1}{2} \left\{ \mu_x \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 + \mu_y \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 + \mu_z \left( \frac{dU}{dz} \right)^2 \right\},$$

dove si è posto

$$(19)_a \quad \mu_x = 1 + 4\pi\kappa_x, \quad \mu_y = 1 + 4\pi\kappa_y, \quad \mu_z = 1 + 4\pi\kappa_z,$$

dove, cioè, le quantità  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu_z$  sono i cosiddetti *coefficienti di permeabilità*, che si riducono all'unità nello spazio esterno al corpo S, spazio in cui si deve porre  $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z = 0$ . Le condizioni necessarie e sufficienti per la positività di  $\Phi$  sono quindi:

$$(19)_b \quad \mu_x > 0, \quad \mu_y > 0, \quad \mu_z > 0,$$

in tutto lo spazio.

Ciò premesso, si osservi che essendo (14)

$$P(V) = \frac{1}{8\pi} \int F^2 dS_\infty + \int \psi dS,$$

si può (13) scrivere anche

$$(19)_c \quad P(V) = -\frac{1}{8\pi} \int G^2 dS_\infty + \int (\psi + 2\pi m^2) dS,$$

dove, rispetto agli assi cui si riferisce l'espressione (19), è

$$\psi + 2\pi m^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu_a m_a^2}{\kappa_a} + \frac{\mu_b m_b^2}{\kappa_b} + \frac{\mu_c m_c^2}{\kappa_c} \right\}.$$

Ne risulta che se, essendo soddisfatte in ogni punto le condizioni (19)<sub>b</sub>, sono in ogni punto di S negativi i coefficienti  $\kappa_a$ ,  $\kappa_b$ ,  $\kappa_c$ ; ovvero, in altri termini, se, essendo positiva la quadratica  $\Phi$ , è invece negativa la  $\psi$ , riesce necessariamente negativa (19)<sub>c</sub> anche l'espressione dell'energia. Ora, in questo caso, cadono tutte le deduzioni del § 13, mentre non cessa, in virtù delle trasformazioni del § 14, di sussistere il teorema d'unicità di soluzione delle equazioni d'induzione.

Il qui accennato caso d'eccezione ai ragionamenti del § 13 <sup>1)</sup>, è importante a notarsi, per ciò ch'esso non corrisponde già ad una mera possibilità astratta, ma si presenta in una classe di fenomeni reali, in quelli, cioè, che si riferiscono ai corpi diamagnetici; e l'incongruenza del risultato che si verificherebbe per questi corpi, rispetto al segno dell'energia, non è un argomento di picciolo peso in favore dell'ipotesi, già più volte messa innanzi ed ora diventata più che mai probabile, d'una polarizzabilità magnetica di tutto lo spazio ambiente.

1) Cfr. l'articolo *Note fisico-matematiche*, nei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* per il 1889.



Quest'ipotesi verrà trattata nel § successivo. Qui giova aggiungere, a modo di complemento, alcune poche osservazioni circa formole incontrate nel § precedente.

Collo stesso procedimento con cui si dedusse l'equazione (18)<sub>a</sub>, si può stabilire l'equazione più generale:

$$(20) \int \left\{ \Phi \left( \frac{dU}{dx} \right) \frac{dU'}{dx} + \Phi \left( \frac{dU}{dy} \right) \frac{dU'}{dy} + \Phi \left( \frac{dU}{dz} \right) \frac{dU'}{dz} \right\} dS_{\infty} - 4\pi P(V_0, U') = 0,$$

dove  $U'$  è, come  $U$ , una funzione potenziale di distribuzione magnetica finita ed in tre dimensioni. Eliminando, con noti processi, le derivate di  $U'$ , si può dare a quest'equazione la forma:

$$\begin{aligned} & \int U' \{ \nabla U - \Delta_1 V_0 \} dS_{\infty} \\ & + \int U' \left\{ D_n U + D_n' U - \left( \frac{dV_0}{dn} + \frac{dV_0'}{dn'} \right) \right\} d\sigma = 0, \end{aligned}$$

dove  $\sigma$  è il complesso di *tutte* le superficie di discontinuità. Da questa unica formola, stante l'arbitrio che regna circa  $U'$ , si ricavano nuovamente le due equazioni (18)<sub>a, b</sub>.

Attribuendo ad  $U'$  il significato di *variazione*,  $\delta U$ , della funzione  $U$ , l'equazione (20) diventa quella stessa che si otterrebbe annullando la variazione  $\delta$  della quantità

$$\frac{1}{4\pi} \int \Phi(U) dS_{\infty} - P(V_0, U).$$

Finalmente dall'equazione

$$2 \int \Phi dS + \int U \nabla U dS + \int U (D_n U + D_n' U) d\bar{\sigma} + \int U D_n U d\sigma = 0$$

si deduce che una funzione  $U$ , assoggettata alla condizione che  $\nabla U$  debba prendere valori dati in ogni punto di uno spazio  $S$  terminato da una superficie  $\sigma$  ed attraversato da superficie di discontinuità  $\bar{\sigma}$ , è del tutto individuata quando sien dati, lungo le superficie  $\bar{\sigma}$  e  $\sigma$ , sia i valori della funzione stessa, sia quelli di  $D_n U + D_n' U$  e, rispettivamente, di  $D_n U$ , sia finalmente in parte gli uni ed in parte gli altri. Ciò si collega col problema dell'induzione magnetica per via di certe considerazioni che sono state esposte nei §§ 12, 13 della Memoria *Sull' induzione magnetica*,

ove è stato soltanto ommesso di considerare l'esistenza di superficie di discontinuità non terminali.

§ 16. S'immagini che sieno di nuovo in presenza, come nel § 13, i due corpi  $S_0$  ed  $S$ , ma che, al tempo stesso, tutto lo spazio sia occupato da un mezzo isotropo polarizzabile. È ragionevole ammettere che questo mezzo invada anche lo spazio occupato da ciascuno dei corpi  $S_0$  ed  $S$ . Senonchè, rispetto al secondo, l'esistenza entro di esso d'una parte del mezzo deve considerarsi, nel qui ammesso ordine d'idee, come la stessa causa efficiente della suscettibilità magnetica del corpo, variamente atteggiata secondo la natura di questo (la quale si rispecchia nei coefficienti della relativa funzione  $\Psi$ ); mentre invece il primo corpo deve considerarsi come polarmente *inerte*, cioè come liberamente pervaso dal mezzo, sul quale esso non esercita che un'azione *apolare*. In tale concetto lo spazio, che si dirà  $S'$ , da riguardarsi come effettivamente occupato dal mezzo modificatore dell'induzione, è quello escluso dal solo corpo  $S$ , talchè, denotando con  $m, m'$  i momenti indotti in  $S$  ed in  $S'$ , con  $V, v$  le rispettive funzioni potenziali, con  $V_0$  la funzione potenziale inducente, si ottengono (§ 14) le seguenti equazioni d'induzione:

per il corpo  $S$ :

$$m_x = -\Psi' \left( \frac{dU}{dx} \right), \quad m_y = -\Psi' \left( \frac{dU}{dy} \right), \quad m_z = -\Psi' \left( \frac{dU}{dz} \right),$$

per il mezzo  $S'$ :

$$m'_x = -\kappa \frac{dU}{dx}, \quad m'_y = -\kappa \frac{dU}{dy}, \quad m'_z = -\kappa \frac{dU}{dz};$$

dove si è posto

$$U = V_0 + V + v$$

e dove  $\kappa$  è il coefficiente di suscettibilità del mezzo.

Le tre equazioni per  $m'$  si possono riguardare come comprese in quelle per  $m$  (estese in tal caso a tutto lo spazio), e ciò considerando  $\Psi$  come una funzione quadratica che possieda, in  $S$ , l'espressione generale già prima supposta ed, in  $S'$ , l'espressione

$$\Psi = \frac{\kappa}{2} \Delta_1 U.$$

Con tale considerazione, se si rammentano le equazioni fondamentali (18)<sub>a,b</sub> del § 14 e se si pone

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa,$$

si trova facilmente che le condizioni, debitamente particolareggiate, che definiscono univocamente la funzione  $U$  (supposta positiva la quadratica  $\Phi$  e la costante  $\mu$ ) sono le seguenti:

I. In ogni punto di  $S$  si ha:

$$\nabla U = \Delta_s V_s.$$

I.' ed in ogni punto di  $S'$ :

$$\mu \Delta_s U = \Delta_s V_s.$$

II. In ogni punto d'una superficie di discontinuità *interna* ad  $S$  si ha:

$$D_n U + D_n' U = \frac{dV_s}{dn} + \frac{dV_s}{dn'},$$

II.' in ogni punto d'una superficie terminale di  $S$ :

$$D_n U + \mu \frac{dU}{dn} = \frac{dV_s}{dn} + \frac{dV_s}{dn'}$$

II." ed in ogni punto d'una superficie di discontinuità o terminale di  $S_0$ :

$$\mu \left( \frac{dU}{dn} + \frac{dU}{dn'} \right) = \frac{dV_s}{dn} + \frac{dV_s}{dn'}.$$

La sola circostanza che esige qualche riflessione è il modo di diportarsi della funzione  $U$  all'infinito: nel caso attuale, infatti, questa funzione non può senz'altro considerarsi come funzione potenziale di masse tutte situate nel finito. Se non che, osservando che in tutto lo spazio esterno ad  $S$  e ad  $S_0$  si ha (I')

$$\Delta_s U = 0$$

e che quindi  $U$  è funzione potenziale di masse che non possono aver sede se non in  $S$ , in  $S_0$  ed all'infinito, si riconosce agevolmente (mercè considerazioni analoghe a quelle fatte da Kirchhoff nella *Lez. XVI*, § 7, della *Meccanica*) come, ammettendo

che la polarizzazione  $m'$  del mezzo debba essere nulla all'infinito, il che è necessario per rendere determinato il problema, si possa nuovamente stabilire che

III. I caratteri della funzione  $U$  all'infinito sono quelli d'una funzione potenziale di masse situate nel finito.

Ciò posto, si confrontino queste varie condizioni cui è soggetta la funzione  $U$ , e che la definiscono completamente, con quelle che dovrebbero sussistere per l'analogia funzione se lo spazio  $S'$  fosse *neutro*, cioè se fosse  $\mu = 1$ . Si riconosce tosto che le condizioni I, II e III resterebbero in questo caso identicamente le stesse, mentre le I', II', II'' muterebbero, e cioè diverrebbero ordinatamente le seguenti:

$$\Delta_s U = \Delta_s V_0 ,$$

$$D_n U + \frac{dU}{dn'} = \frac{dV_0}{dn} + \frac{dV_0}{dn'} ,$$

$$\frac{dU}{dn} + \frac{dU}{dn'} = \frac{dV_0}{dn} + \frac{dV_0}{dn'} .$$

Or ecco come si può ristabilire l'accordo *formale* di tutte le condizioni. Si ponga

$$\Phi = \mu \Phi' , \quad V_0 = \mu V_0'$$

e si denotino con  $\nabla'$ ,  $D_n'$  le operazioni  $\nabla$  e  $D_n$  eseguite colla quadratica  $\Phi'$  anzichè colla  $\Phi$ . Per tale semplice sostituzione le due equazioni I, I' vengono a coincidere nell'unica

$$I_a \quad \nabla' U = \Delta_s V_0'$$

valida in tutto lo spazio, mentre le II, II', II'' vengono a coincidere in quest'altra unica equazione

$$II_a \quad D_n' U + D_n' U = \frac{dV_0'}{dn} + \frac{dV_0'}{dn} ,$$

valida per tutte le superficie di discontinuità e terminali così di  $S$  come di  $S_0$ . La funzione  $U$  individuata da queste condizioni  $I_a$ ,  $II_a$ , e dalla III è ancora la stessa di prima, poichè il passaggio dalla quadratica  $\Phi$  alla  $\Phi'$  non importa che la divisione

di tutti i coefficienti per la *costante*  $\mu$ , vale a dire che invece di porre

$$\begin{aligned}\Phi(U) &= \frac{\Delta_1 U}{2} + 4\pi\Psi(U) && \text{in } S, \\ &= -\frac{\mu}{2}\Delta_1 U && \text{in } S'\end{aligned}$$

si deve porre

$$\begin{aligned}\Phi'(U) &= \frac{\Delta_1 U}{2\mu} + \frac{4\pi}{\mu}\Psi(U) && \text{in } S, \\ &= -\frac{\Delta_1 U}{2} && \text{in } S'.$$

Ma mentre la funzione  $U$ , definita dalle condizioni I, I', II, II', II'', III è quella che soddisfa all'equazione

$$U = V_0 + V + v$$

e che corrisponde alla simultanea considerazione dei soliti due corpi  $S_0$ ,  $S$  e dell'*ambiente magnetico*, quella definita dalle condizioni I<sub>a</sub>, II<sub>a</sub>, e III soddisfa invece (§ 14) all'equazione

$$U = V_0' + V'$$

e corrisponde alla considerazione d'un inducente  $S_0$  di funzione potenziale  $V_0'$  e d'un indotto  $S$  di funzione potenziale  $V'$ , *ad ambiente neutro*. La necessaria eguaglianza

$$V_0 + V + v = V_0' + V'$$

dà quindi

$$V' = V + v + V_0 - V_0',$$

cioè

$$V_0' = \frac{V_0}{\mu}, \quad V' = V + v + \frac{4\pi\kappa}{\mu} V_0.$$

La prima di queste due equazioni fornisce il noto teorema che l'esistenza d'un ambiente di permeabilità  $\mu$  impicciolisce *apparentemente* il valore di ogni funzione potenziale inducente nel rapporto da  $\mu$  ad 1. La seconda stabilisce la relazione che passa

fra la funzione potenziale indotta *apparente*  $V'$ , la vera  $V$  e quella,  $v$ , relativa all'ambiente. Si può osservare che, se non esistesse il corpo  $S$ , si avrebbe  $V = V' = 0$  e quindi

$$v = -\frac{4\pi\kappa}{\mu} V_0;$$

denotando con  $v_0$  questo particolare valore (indipendente da  $S$ ) della funzione potenziale indotta nel mezzo indefinito, si può dunque scrivere

$$V' = V + v - v_0.$$

L'effetto apparente dell'esistenza di un mezzo si riconosce più distintamente supponendo che  $\psi$  abbia la forma (19), giacchè si ha in tal caso

$$\Phi' = \frac{1}{2} \left\{ \mu_x' \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 + \mu_y' \left( \frac{dU}{dy} \right)^2 + \mu_z' \left( \frac{dU}{dz} \right)^2 \right\},$$

dove

$$\mu_x' = \frac{\mu_x}{\mu}, \quad \mu_y' = \frac{\mu_y}{\mu}, \quad \mu_z' = \frac{\mu_z}{\mu}.$$

E poichè, ponendo

$$\mu_a' = 1 + 4\pi\kappa_a', \quad \mu_b' = 1 + 4\pi\kappa_b', \quad \mu_c' = 1 + 4\pi\kappa_c',$$

risulta

$$\kappa_a' = \frac{\kappa_a - \kappa}{\mu}, \quad \kappa_b' = \frac{\kappa_b - \kappa}{\mu}, \quad \kappa_c' = \frac{\kappa_c - \kappa}{\mu},$$

si vede come, pur essendo positivi i quattro coefficienti di suscettibilità *vera*  $\kappa_a, \kappa_b, \kappa_c, \kappa$ , possano diventare negativi i coefficienti di suscettibilità *apparente*  $\kappa_a', \kappa_b', \kappa_c'$ : si vede, cioè, come l'ipotesi della polarizzabilità di tutto lo spazio ambiente permetta di spiegare i fatti del diamagnetismo, senza rinunciare alle condizioni imposte dalla necessità che la vera espressione dell'energia si mantenga sempre positiva.

(*Continua*).

SUL PRINCIPIO DI HUYGHENS; PROF. VITO VOLTERRA <sup>1)</sup>

Per ottenere questa estensione seguiremo un procedimento analogo a quello col quale nella teoria della funzione potenziale si giunge alla formula (11) partendo dal lemma di Green.

Se  $\psi$  e  $\chi$  sono due funzioni regolari entro il campo S, limitato dal contorno  $\sigma$ , il detto lemma ci dà

$$\int_{\sigma} \left( \frac{d\psi}{dn} \chi - \frac{d\chi}{dn} \psi \right) d\sigma = \int_S (\psi \Delta^2 \chi - \chi \Delta^2 \psi) dS.$$

Supponiamo ora che si abbia

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} - a^2 \Delta^2 \psi = \Psi(x, y, z, t), \quad \frac{d^2 \chi}{dt^2} - a^2 \Delta^2 \chi = X(x, y, z, t)$$

allora l'equazione precedente diviene

$$\begin{aligned} (13) \int_{\sigma} \left( \frac{d\psi}{dn} \chi - \frac{d\chi}{dn} \psi \right) d\sigma &= \frac{1}{a^2} \int_S \left( \frac{d^2 \chi}{dt^2} \psi - \frac{d^2 \psi}{dt^2} \chi \right) dS - \frac{1}{a^2} \int_S (\Psi \chi - X \psi) dS \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} \int_S \left( \frac{d\chi}{dt} \psi - \frac{d\psi}{dt} \chi \right) dS - \frac{1}{a^2} \int_S (\Psi \chi - X \psi) dS. \end{aligned}$$

Se prendiamo  $\chi = \frac{f(r+at)}{r}$ , ove con  $r$  si denotano le distanze contate da un punto fisso  $x_0, y_0, z_0$  interno allo spazio S, questa funzione non sarà regolare nel punto  $x_0, y_0, z_0$  stesso, mentre se  $f$  è una funzione regolare, tale sarà  $\chi$  in tutti gli altri punti di S. Volendo dunque applicare la (13) bisognerà escludere il detto punto  $x_0, y_0, z_0$ . Faremo questo mediante una sfera  $\omega$  avente il centro in  $x_0, y_0, z_0$  ed il raggio R. Chiamando quindi S' lo spazio S, da cui si sia tolto lo spazio racchiuso entro la sfera  $\omega$  si avrà, osservando che  $X = 0$ ,

1) *Continuazione.* Vedi pag. 244 del volume precedente.

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & \int_{\sigma} \left[ \frac{d\psi}{dn} \frac{f(r+at)}{r} - \frac{d}{dn} \left( \frac{f(r+at)}{r} \right) \psi \right] d\sigma + \int_{\omega} \left[ \frac{d\psi}{dn} \frac{f(r+at)}{r} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{d}{dn} \left( \frac{f(r+at)}{r} \right) \psi \right] d\omega + \frac{1}{a^2} \int_{S'} \Psi \frac{f(r+at)}{r} dS' \\
 & = \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} \int_{S'} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{f(r+at)}{r} \right) \psi - \frac{d\psi}{dt} \frac{f(r+at)}{r} \right] dS'
 \end{aligned}$$

Consideriamo ora in particolare il secondo integrale del primo membro. Chiamando  $dx$  l'elemento della sfera di raggio 1, avremo

$$d\omega = R^2 dx,$$

quindi il detto integrale potrà scriversi

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\alpha} \left[ \frac{d\psi}{dn} \frac{f(R+at)}{R} - \psi \frac{f'(R+at)}{R} + \psi \frac{f(R+at)}{R^2} \right] R^2 dx \\
 &= R \int_{\alpha} \left[ \frac{d\psi}{dn} f(R+at) - \psi f'(R+at) \right] dx + \int_{\alpha} \psi f(R+at) dx
 \end{aligned}$$

onde facendo impiccolire indefinitamente  $R$ ,

$$(15) \quad \lim_{R=0} J = 4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t) f(at).$$

La formula (14) potrà dunque scriversi, osservando che l'ultimo integrale del primo membro è proprio,

$$\begin{aligned}
 & 4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t) f(at) + \int_{\sigma} \left[ \frac{d\psi}{dn} \frac{f(r+at)}{r} - \frac{d}{dn} \left( \frac{f(r+at)}{r} \right) \psi \right] d\sigma \\
 & \quad + \frac{1}{a^2} \int_S \Psi \frac{f(r+at)}{r} dS \\
 & = \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} \int_S \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{f(r+at)}{r} \right) \psi - \frac{d\psi}{dt} \frac{f(r+at)}{r} \right] dS.
 \end{aligned}$$

Abbiamo ora



$$\begin{aligned}\psi \frac{d}{dn} \left( \frac{f(r+at)}{r} \right) &= \psi \frac{d}{dn} f(r+at) + \frac{1}{r} \psi f'(r+at) \frac{dr}{dn} \\ &= \psi \frac{d}{dn} f(r+at) - \frac{1}{ar} \frac{d\psi}{dt} f(r+at) \frac{dr}{dn} + \frac{1}{a} \frac{d\psi}{dt} \left( \frac{1}{r} \psi f(r+at) \frac{dr}{dn} \right)\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t) f(at) + \int_{\sigma} \left[ \frac{d\psi}{dn} \frac{1}{r} - \psi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{1}{ar} \frac{d\psi}{dt} \frac{dr}{dn} \right] f(r+at) d\sigma \\ + \frac{1}{a^2} \int_S \psi \frac{1}{r} f(r+at) dS = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{a^2} \int_S \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{f(r+at)}{r} \right) \psi - \frac{d\psi}{dt} \frac{f(r+at)}{r} \right] dS \right. \\ \left. + \frac{1}{a} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \psi f(r+at) \frac{dr}{dn} d\sigma \right\}.\end{aligned}$$

Suppongasi che la funzione  $f(x)$  che per ora abbiamo lasciata indeterminata si annulli per tutti i valori dell'argomento superiori ad un certo limite  $N$  e per tutti quelli inferiori al limite  $-N$ ; allora moltiplicando ambo i membri della equazione precedente per  $dt$  e integrando fra  $-\infty$  e  $+\infty$ , il secondo membro andrà a zero, e per conseguenza otterremo

$$\begin{aligned}(16) \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t) f(at) + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\sigma} \left[ \frac{d\psi}{dn} \frac{1}{r} - \psi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{1}{ar} \frac{d\psi}{dt} \frac{dr}{dn} \right] f(r+at) d\sigma \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} \int_S \psi \frac{1}{r} f(r+at) dS = 0.\end{aligned}$$

Denotiamo con  $\xi, \eta, \zeta$  le coordinate dei punti del contorno  $\sigma$  e con  $x, y, z$  quelle dei punti di  $S$ . Le quantità che compariscono nei due ultimi integrali saranno

$$(17) \quad \frac{d\psi}{dn} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dn} + \frac{d\psi}{d\eta} \frac{d\eta}{dn} + \frac{d\psi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dn} = \psi_1(\xi, \eta, \zeta, t)$$

$$(17') \quad \psi = \psi(\xi, \eta, \zeta, t)$$

$$(17'') \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi(\xi, \eta, \zeta, t)}{dt} = \psi_2(\xi, \eta, \zeta, t)$$

$$(17''') \quad \Psi = \Psi(x, y, z, t)$$

onde se nei due detti integrali poniamo in luogo di  $t$ ,  $t - \frac{r}{a}$ , la loro somma diverrà

$$\begin{aligned} K &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\sigma} \left\{ \psi_1\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right) \frac{1}{r} - \psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right. \\ &+ \frac{1}{ar} \psi_2\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right) \frac{dr}{dn} \left. \right\} f(at) d\sigma + \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S \frac{\Psi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)}{a^2 r} f(at) dS \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) dt \left\{ \int_{\sigma} \left[ \psi_1\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right) \frac{1}{r} - \psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{d\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{dr} \frac{dr}{dn} \right] d\sigma + \frac{1}{a^2} \int_S \frac{\Psi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)}{r} dS \right\} \end{aligned}$$

Ora se rappresentiamo con  $\frac{d}{dn} \left[ \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right]$  la derivata presa rispetto ad  $n$  del rapporto  $\frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r}$ , ritenendo le  $\xi, \eta, \zeta$  che compariscono esplicitamente come costanti e la sola  $r$  funzione di  $n$  (Cfr. il § 2) avremo

$$\frac{d}{dn} \left[ \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right] = \psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right) \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{dr} \frac{dr}{dn}$$

$\psi_1\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)$  rappresenta invece la derivata di  $\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)$  rispetto ad  $n$ , ritenendo  $r$  costante e soltanto le  $\xi, \eta, \zeta$  che compariscono esplicitamente come funzioni di  $n$ . [(Vedi formula (17)]. Per distinguere la derivata rispetto ad  $n$  preso in questa ipotesi, da quella che abbiamo indicata precedentemente col simbolo  $\frac{d}{dn}$ , la denoteremo col simbolo  $\frac{\partial}{\partial n}$ . Per conseguenza

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) dt \left\{ \int_{\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right] - \frac{d}{dn} \left[ \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right] \right) d\sigma \right. \\ \left. + \frac{1}{a^2} \int_S \frac{\Psi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)}{r} dS \right\}$$

e la equazione (16) potrà scriversi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at) dt \left\{ 4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t) + \int_{\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right] - \frac{d}{dn} \left[ \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right] \right) d\sigma + \frac{1}{a^2} \int_S \frac{\Psi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)}{r} dS \right\}.$$

Ora  $f(at)$  è una funzione arbitraria. Affinchè dunque la formula precedente possa sussistere, bisognerà che si abbia

$$4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t) + \int_{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right) - \frac{d}{dn} \left( \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right) \right\} d\sigma \\ + \frac{1}{a^2} \int_S \frac{\Psi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right)}{r} dS$$

d'onde

$$(18) \quad \psi(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left\{ \frac{d}{dn} \left( \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} \right) \right\} d\sigma - \frac{1}{4\pi a^2} \int_S \frac{\Psi(x, y, z, t - \frac{r}{a})}{r} dS.$$

Questa formula è dovuta al Beltrami. Supponendo che  $\psi$  sia un integrale della equazione

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = a^2 \Delta^2 \theta$$

$\Psi$  si riduce eguale a zero, e si ottiene la formula di Kirchhoff

$$(18') \quad \psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left\{ \frac{d}{dn} \left( \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a})}{r} \right) \right\} d\sigma$$

in cui si è posto  $x, y, z$  in luogo di  $x_0, y_0, z_0$  che compariscono nella formula precedente.

Essa è appunto la generalizzazione della formula (11) che cercavamo.

Si ponga

$$\frac{1}{4\pi} \psi \left( \xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a} \right) = \phi(\xi, \eta, \zeta, r - at)$$

$$- \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \psi \left( \xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a} \right)}{\partial n} = - \frac{1}{4\pi} \psi_1 \left( \xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a} \right) = f(\xi, \eta, \zeta, r - at)$$

la (18') potrà scriversi

$$(19) \quad \psi(x, y, z, t) = \int_{\sigma} \left\{ \frac{d}{dn} \left( \frac{\phi(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} \right) + \frac{f(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} \right\} d\sigma.$$

Avremo quindi il teorema:

*Ogni funzione  $\psi(x, y, z, t)$  regolare entro un campo finito S e che soddisfa l'equazione differenziale*

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = a^2\Delta^2\psi$$

*potrà considerarsi come il potenziale di velocità (o come il potenziale degli spostamenti) dovuto a due distribuzioni sopra il contorno  $\sigma$ : l'una di centri semplici, l'altra di centri doppi normali a  $\sigma$  stesso.*

( Continua ).

## RIVISTA

SUNTI di A. STEFANINI.

Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. Vol. XLIII e XLIV, 1891.

E. PASCHEN. *Sulle forze elettromotrici.* — L' A. riassume nel modo seguente i principali risultati di questo suo studio:

Gli elettrodi a goccia, di amalgama di zinco o di cadmio, hanno lo stesso contegno nelle soluzioni di  $Zn SO_4$ ,  $Cd Br_2$ ,  $MgSO_4$ ,  $MgCl_2$ , e fanno ritenere che qui gli elettrodi non sieno più scarichi, ma che acquistino invece una carica crescente al crescere della quantità di metallo contenuta nell'amalgama. Le diversità dovute al diverso contenuto in metallo, si possono spiegare ammettendo che le particelle di zinco e di cadmio, assumano completamente la loro carica nel tempo che dura il loro contatto col liquido, e perciò quanto più son numerose le particelle metalliche, e tanto maggiore è la carica che acquista l'amalgama. Le deduzioni tratte da Ostwald, Warburg, e F. Braun dalla ipotesi che gli elettrodi non sieno polarizzabili, non sono confermate dai fatti.

La curva che rappresenta la dipendenza fra la tensione superficiale e le f. e. m. introdotte in un elettrometro capillare riunito all'elettrodo a goccie, non è mai simmetrica rispetto all'ordinata del massimo. Tuttavia si può anche qui applicare, purchè opportunamente modificato, il metodo di Ostwald per trovare la posizione di tal massimo.

A. RAPS. *Pompa automatica a mercurio.* — L' A. descrive una pompa a mercurio, nella quale per mezzo della pressione ot-

Serie 3. Vol. XXXII.

tenuta con una colonna d'acqua, è reso automatico il movimento dei robinetti e il funzionamento della pompa stessa, la quale è una Töpler modificata in modo da produrre la maggior rarefazione possibile; ma senza l'aiuto dei disegni di cui questa Nota è corredata, non è possibile darne un cenno intelligibile.

K. PRYTZ. *Metodo per la misura assoluta dei periodi di rotazione.* — Il disco di cui si vuol misurare la durata di una rotazione, porta un tubetto di vetro munito di un collo capillare, pieno di un inchiostro molto scorrevole. Di fronte a questo cilindro si fa cadere un cilindro di ottone lungo 76 cm. ben tornito, del diametro di cm. 1,4, munito di un cilindro di ferro di uguale spessore, lungo 5 cm. che serve a farlo star sospeso ad un'opportuna elettrocalamita.

Ad ogni rotazione del disco l'inchiostro lascia una traccia sul cilindro cadente, e dalle distanze fra queste tracce, mediante la legge della caduta dei gravi, si ha facilmente, e con molta esattezza, la durata della rotazione (cioè a meno di  $\frac{1}{50.000}$  di secondo).

Com'è facile intendere, questo metodo ha anche servito all'A. per dimostrare in lezione le leggi della caduta dei gravi, e potrebbe servire per studiare la resistenza opposta alla caduta dall'atmosfera, dai liquidi, da un campo magnetico etc.

Per mantener costante il periodo della rotazione del disco girevole, l'A. si è servito di un motore elettromagnetico, il cui moto fu trasmesso al disco per mezzo di funi e di pulegge. Per eliminare le disuguaglianze nella rotazione del motore, l'ultima trasmissione del moto al disco girevole è ottenuta per mezzo dell'attrito del mercurio contenuto in una vaschetta di ferro, nella quale poi pesca un altro disco di ferro unito all'asse del disco girevole.

Per far tracciare il segno sulla sbarra cilindrica d'ottone liberamente cadente, l'A. ha poi trovato opportuno di far rompere la punta affilata del tubetto, che contiene l'inchiostro, mentre l'apparecchio è già in rotazione; allora l'inchiostro viene spruzzato orizzontalmente, per la forza centrifuga della rotazione, e lascia un segno nettissimo sul cilindro.

Detto. *Determinazione del rapporto fra un periodo di rotazione e la durata di vibrazione di un diapason.* — All'asse dell'apparecchio di rotazione sopra descritto, l'A. fissa un disco d'ottone, del diametro di 15 cm. alla cui periferia, e alle estremità di due diametri fra loro perpendicolari, son fissati 4 magneti cilindrici, lunghi 5 cm., dello spessore di 14 mm. coi poli omonimi tutti da una medesima parte.

Durante la rotazione del disco, questi 4 magneti passano fra le branche di un diapason di ferro dolce, opportunamente fissato a un separato sostegno; ed è chiaro che se  $N$  è il numero delle vibrazioni che compie il diapason al secondo, esso entrerà in vibrazione se il numero  $n$  dei giri che in un secondo compie il disco che porta quei magneti è uno dei numeri  $N/4, N/8, N/12, \dots$ . Si può dunque così costatare se il disco ha una velocità di rotazione  $n_p = N/4p$ , con  $p$  numero intero qualunque; ma bisogna notare che il diapason entra in vibrazione anche per velocità del disco poco diversa da  $n_p$ . Un mezzo sicuro per riconoscere se quella velocità è esattamente  $n_p$ , si ha nel costatare se il diapason ha acquistato il massimo della sua ampiezza di vibrazione. A tale scopo il diapason è munito di un'appendice che porta una vite micrometrica, contro la quale va ad urtare uno dei rebbi, ed è facile immaginare come si possa regolarsi per riconoscere quanto è stato detto.

Con questo metodo l'A. ha determinato il rapporto fra i due periodi con molta precisione; ed uno dei vantaggi del metodo è che il diapason vibra liberamente, senza essere obbligato a registrare la sua curva, nè ad aprire e chiudere dei circuiti per mantenere le proprie vibrazioni.

C. L. WEBER. *Sulla misura dell'inclinazione magnetica.* — Un anello elettrodinamico sia girevole attorno a un suo diametro orizzontale, e, mediante opportuni pesi, il suo centro di gravità sia situato in modo, che l'asse magnetico dell'anello, quand'è in riposo e non è percorso da corrente, faccia coll'orizzonte un angolo  $\gamma$  alquanto maggiore di quello d'inclinazione.

Se il piano di rotazione dell'anello è normale al meridiano magnetico, e nell'anello passa una corrente d'intensità  $i$  in direzione tale da produrre un polo nord nella parte inferiore dell'asse magnetico, si avrà un momento di rotazione

$$V. f. i \cos \gamma$$

se  $V$  è l'intensità verticale del magnetismo terrestre, ed  $f$  la superficie abbracciata dalle spire dell'anello.

Se la medesima corrente mobile ha il piano di rotazione nel meridiano, al momento precedente se ne aggiunge anche un altro dato da

$$H f. i \sin \gamma.$$

Questo momento si sottrae dal precedente se il polo nord della corrente è volto al nord.

Si faccia ora ruotare l'anello attorno a un asse verticale, in modo che il piano di rotazione passi gradatamente dalla posizione Nord-Sud all'altra Est-Ovest; in qualunque posizione, il momento della componente verticale rimane lo stesso, mentre quello della componente orizzontale, per una posizione che fa un angolo  $\alpha$  colla direzione Nord-Sud diviene

$$H f i \cdot \sin \gamma \cdot \cos \alpha.$$

Il momento totale è, per questa posizione,

$$R = V f i \cos \gamma - H f i \sin \gamma \cos \alpha.$$

Se  $\gamma$  è tale che sia  $V f i \cos \gamma < H f i \sin \gamma$ , cioè se  $\gamma$  è maggiore dell'inclinazione, è possibile trovare un tal valore di  $\alpha$  pel quale sia  $R = 0$ .

In tal posizione adunque, al passaggio della corrente l'anello non risente alcun momento di rotazione, e al chiudere della corrente l'anello resta nella posizione che aveva. Se ciò accade, si ha

$$V f i \cos \gamma = H f i \sin \gamma \cos \alpha$$

e quindi:

$$H/V = \tan \gamma \cos \alpha = \tan I.$$

Si trova così l'inclinazione  $I$ , se si può determinare  $\gamma$  ed  $\alpha$ .

Sono evidenti i vantaggi che questo metodo offre su gli altri fin qui adoprati. L'A. ha costruito un apparecchio, improvvisato, per applicarlo alla determinazione pratica di  $I$ , e il valore che ha trovato concorda con quello che si ottiene coi metodi di Schering e di Wild. Egli indica quali sono le precauzioni da usarsi nel far le misure, e discute le condizioni migliori per usar con vantaggio di questo nuovo inclinometro, che può anche servire a determinare la posizione del meridiano magnetico.

T. DES COUDRES. *Sulle proprietà termoelettriche del mercurio e delle amalgame molto diluite.* — Seguendo un suggerimento di G. Wiedemann, l'A. ha modificato il metodo col quale Haga studiò il trasporto elettrico del calore nei metalli, scoperto da Helmholtz, in modo da eliminare l'influenza che potrebbe avere sulla temperatura dei punti esplorati il calore Peltier che si ha al contatto degli elettrodi.

Per questo l'A. al tubo ad U di Haga ne sostituì un altro parimente ad U che a ciascuna estremità aveva aggiunto un piccolo tubo a sifone, destinato a ricever gli elettrodi. Per esplorare la temperatura, lungo il tubo stesso erano saldati 6 tubi di platino. Riempito di mercurio l'apparecchio, e tenendolo verticale



col gomito del tubo principale in alto e contenuto entro un bagno d'acqua calda, mentre la porzione inferiore era raffreddata, e facendo passar poi la corrente, l'A. trovò verificata, anche con questa nuova disposizione, la legge di Haga.

Dopo di ciò l'A. espone le ricerche fatte per determinar la dipendenza fra la posizione del mercurio nella scala termoelettrica, e la pressione idrostatica che si ha sulla superficie studiata.

**J. ROSENTHAL.** *Sulla conduttività elettrica degli elettroliti solidi a diverse temperature.* — Da molte ricerche preliminari sulla resistenza degli elettroliti solidi, l'A. si persuase che, a motivo della difficoltà insormontabile di stabilir contatti perfetti fra gli elettrodi e i corpi studiati, non è possibile ottener la grandezza assoluta della conduttività degli elettroliti solidi, e perciò si limitò a studiarne la conduttività relativa a diverse temperature.

Nei pezzi compressi o fusi, ridotti a forma di cilindri di 12 mm. di diametro e alti da 4 a 10 mm. l'A. praticava due fori paralleli, non passanti, che poi rivestiva di grafite nella parte interna, e in essi versava poi della lega di Rose liquefatta e in questa, prima che si solidificasse, poneva un filo di platino.

Fu così, fra altro, trovato che il cromato di piombo non tenuto a temperatura elevata, diminuisce di conduttività col tempo, e tanto più quanto più è alta la temperatura.

Il cloruro, il bromuro e l'ossido di piombo hanno a una data temperatura una conduttività notevolmente maggiore, se prima sono stati esposti a temperatura più elevata.

**P. BACHMETJEV.** *Influenza della magnetizzazione sulle proprietà termoelettriche del ferro e del nichel.* — Se si forma una coppia termoelettrica con un filo di ferro stirato e uno ordinario, della stessa specie, scaldando la saldatura si ha una corrente che va dal filo ordinario a quello stirato. Se la coppia è formata con filo magnetizzato longitudinalmente e filo ordinario, scaldando la saldatura la corrente va dal filo ordinario a quello magnetizzato. Rammentando le variazioni di lunghezza prodotte nei fili di ferro dalla magnetizzazione longitudinale, era da ritenersi che la magnetizzazione di una delle metà del filo producesse una corrente termoelettrica, soltanto per l'allungamento che così quella porzione viene a risentire; e infatti l'A. ha ottenuto dalle sue esperienze questo risultato. Da queste risulta ancora che la direzione della magnetizzazione non influisce sul senso della corrente termoelettrica. Sottoponendo il filo contemporaneamente alla magnetizzazione e alla trazione, per una trazione assai forte l'influenza della magnetizzazione si annulla; per trazione maggiore, il senso

della corrente termoelettrica è rovesciato. Se la magnetizzazione non fa ulteriormente allungare la metà del filo soggetto preliminarmente alla trazione, non ha nessuna azione sulla f. e. m. della coppia.

Col nichel, che possiede proprietà generalmente opposte a quelle del ferro, l'intensità della corrente termoelettrica aumenta con quella della corrente magnetizzante quando il filo non è stato stirato; mentre l'influenza della magnetizzazione su un filo che venga via via sempre più allungato per trazione, decresce continuamente.

W. BÖHLENDORFF. *Osservazioni alla Memoria del sig. B. Walter « Sulla prova della decomposizione dei gruppi molecolari nelle soluzioni ecc. »* — Il Walter cfr. *N. Cim.* 27 pag. 179 esperimentò sul potere assorbente di soluzioni diversamente diluite, adoprando sempre la stessa lunghezza della colonna liquida assorbente; ora l'A. dubitando che quel metodo potesse condurre a risultati inesatti, lo modificò in modo da compensare con la lunghezza della colonna assorbente la diluizione crescente della soluzione studiata, e facendo così incontrare al raggio luminoso sempre lo stesso numero di molecole. In questo modo i risultati del Walter non sono stati confermati; ed essi erano determinati probabilmente dal cambiamento che si aveva nell'intensità luminosa del fascio trasmesso allorchè cambiava la diluizione. Non è dunque necessario di ammettere la scomposizione dei gruppi molecolari indicata dal Walter; ed anche il fatto da esso notato, che la fluorescenza diminuisce al crescere della concentrazione, si spiega con la teoria della luminosità del Wiedemann, secondo la quale tal diminuzione è dovuta allo smorzamento delle oscillazioni delle molecole fluorescenti prodotto dalle molecole contigue.

H. EBERT. *Influenza del diverso splendore delle linee spettrali sui fenomeni d'interferenza.* — Secondo Michelson e Morley (*Am. Journ. of Science* (3) 34 pag. 430, 1887) la linea  $H\alpha$  dell'idrogeno dovrebbe esser doppia perchè, analogamente a ciò che avviene per la linea doppia del sodio, producendo delle interferenze con la luce di quella riga dell'idrogeno, le strie d'interferenza spariscono quando la differenza nel percorso dei raggi è circa  $15000 \lambda$  e di nuovo quando è circa  $45000 \lambda$ .

Ora l'A., servendosi del metodo delle interferenze d'ordine superiore adoprato con tanto vantaggio nello studio dell'analisi spettrale, ha riconosciuto che le interferenze posson prodursi colla luce dell'idrogeno anche nei casi nei quali secondo i due fisici americani non si avrebbero più, e che se mai le strie d'interferenza divengono invisibili, si deve alla mancanza d'intensità

della luce rossa, non alla sua eterogeneità. Anzi, l'idrogeno alla pressione di circa 5 mm. dà una luce rossa della massima omogeneità. Invece l'A. ha trovato che le strie d'interferenza diventano meno distinte, ma non spariscono, per una differenza di percorso uguale a 24500 lunghezze d'onda.

L'A. discute quindi le cagioni di questa opposizione dei suoi risultati con quelli ottenuti da Michelson e Morley, e conclude che soltanto la distribuzione irregolare del potere emissivo fra le varie parti della riga luminosa H $\alpha$ , che per quanto sia sottile, è pur sempre di grandezza finita, può determinare quell'apparire e sparire delle strie d'interferenza. La luce delle linee verdi del tallio e del mercurio è invece talmente omogenea, che il minimo della visibilità per le strie d'interferenza da esse prodotte oltrepassa i limiti delle condizioni che ordinariamente si posson raggiungere.

Quella distribuzione irregolare della intensità luminosa nelle righe spettrali, determina anche degli spostamenti nella posizioni del minimo di visibilità delle strie d'interferenza, a seconda delle condizioni della luminosità; e ciò spiega perchè vi è differenza fra la posizione del minimo osservata dall'A. nelle strie d'interferenza della luce rossa dell'idrogeno, e quelle indicate da Michelson e Morley, perchè i modi di render luminoso l'idrogeno eran diversi nelle rispettive esperienze.

W. VOIGT. *Su un apparecchio semplice per determinare la dilatazione termica dei solidi, specialmente dei cristalli.* — Una piccola mensola fissata ad un muro, sorregge una lastra d'ottone lunga 30 cm. e larga 4 cm. in modo che questa sia libera da ogni parte. Alla parte inferiore, la sbarra porta un pezzo a doppia squadra, che con una vite può fissarsi a diverse altezze. Su questo pezzo è praticata una piccola scavatura, nella quale si appoggia la sbarretta A di cui si vuol trovare il coefficiente di dilatazione, ponendola verticale. La parte superiore di questa sbarretta si fa appoggiare contro una vite di un triangolo metallico, il quale con altre due viti si appoggia su perni fissi alla lastra d'ottone. Il triangolo ora detto porta un'asticella lunga 3 cm. cui è fissato uno specchio: e un altro specchio è situato, in posizione invariabile, sulla lastra d'ottone. Due contrappesi, servono a tenere il triangolo e lo specchio mobile in una posizione d'equilibrio stabile.

È facile intendere come, facendo variare la temperatura dell'apparecchio per mezzo di bagni opportuni, contenuti entro un recipiente che si porta al di sotto dell'apparecchio stesso, fino a che tutta la sbarretta A sia immersa nel liquido, dai movimenti

dello specchio mobile osservati con un cannocchiale, o su una scala fissa e lontana, si possa determinare la differenza fra i coefficienti di dilatazione della sbarretta studiata e dell'ottone che forma l'apparecchio. Adoprando del quarzo, che ha un coefficiente di dilatazione ben conosciuto, si può, come ha fatto l'A. determinare una volta per tutte il coefficiente dell'ottone, e così l'apparecchio serve comodamente per qualunque sostanza.

È utile che la sbarretta A sia lunga circa 6 cm. ma si può mettere insieme anche con molti piccoli pezzi della medesima sostanza.

R. LAMPRECHT. *Sulle equazioni della forza elettromagnetica.* — L'A. mostra come si possa rigorosamente ottenere la dimostrazione, accennata soltanto all'art. 602 del Treatise di Maxwell, della forza elettromagnetica (ponderomotrice) che agisce su un conduttore percorso da corrente, che si muove in un campo magnetico.

Vol. XLIV. — W. C. RÖNTGEN. *Sulla compressibilità del solfuro di carbonio, del benzolo, dell'etere etilico e di alcuni alcoli.* — Coi metodi adoperati in ricerche analoghe (cfr. *N. Cim.* 22, pag. 186, e 26, pag. 186) l'A. ha studiato la compressibilità delle sostanze sopra indicate, tenendo conto della correzione dovuta al calore di compressione.

Per tutti i liquidi studiati, eccettuata l'acqua, la compressibilità cresce al crescere della temperatura.

La compressibilità dei diversi alcoli normali, a ugual temperatura, è tanto minore, quanto più si va innanzi nella serie degli alcoli. Gli alcoli normali si comprimono più dei corrispondenti isomeri. La diversa disposizione degli atomi nella molecola, più che la massa delle molecole, sembra quindi influire sulla compressibilità di tali corpi.

W. C. RÖNTGEN e L. ZEHNDER. *Sull'influenza della pressione sull'indice di refrazione dell'acqua, del solfuro di carbonio, del benzolo, dell'etere etilico e di alcuni alcoli.* — Dal confronto dei risultati delle proprie ricerche sulla variazione dell'indice di refrazione dell'acqua prodotta dalla pressione, con quelli di Röntgen e Schneider sulla compressibilità dell'acqua, lo Zehnder aveva concluso (cfr. *N. Cim.* 26, pag. 187) che invece della formula  $(n^2 - 1)/(n^2 + 2) \cdot 1/d = \text{costante del Lorentz}$ , era verificata l'altra  $(n - 1)/d = \text{costante}$ , che fu per la prima volta indicata dal Beer.

Essendo interessante riconoscere in qual modo si comportano a questo riguardo altri liquidi, tanto più che le esperienze del Quincke sul medesimo soggetto (*N. Cim.* 15, pag. 85) risulta-

rono agli A. affette da errori non indifferenti, gli A. medesimi eseguirono delle ricerche ottiche sui medesimi liquidi che, riguardo alla compressibilità, furono studiati dal Röntgen.

Da queste esperienze risulta che nè la formula di Beer, nè quella di Lorentz rappresentano coll'esattezza richiesta le variazioni che la pressione determina nell'indice di refrazione dei liquidi studiati.

Se l'equazione di Lorentz si scrive nella sua forma primitiva, cioè:

$$(K - 1) / (K + 2) \cdot 1/d = \text{costante},$$

ove  $K$  è la costante dielettrica della sostanza studiata, potrebbe forse corrispondere alla realtà; e allora si sarebbe condotti alla importante conclusione, che le costanti dielettriche sarebbero assai maggiormente cambiate, di quello che non lo sieno le relative densità, dalla pressione; per es. per l'acqua la costante dielettrica cambierebbe 25 volte circa di più di quello che cambia la densità.

Del resto l'equazione del Lorentz non è una conseguenza necessaria della teoria di Maxwell, essendo stata dedotta da ipotesi sulle proprietà delle molecole ponderabili e dell'etere, che non sono state introdotte dal Maxwell nella sua teoria.

→ T. LOHNSTEIN. *Influenza della capillarità sull'equilibrio dei galleggianti*. — Secondo il Wilhelmy, la teoria della capillarità non serviva a spiegare le condizioni d'equilibrio dei corpi immersi nei liquidi; ma i di lui risultati non sono esenti da obiezioni: ora l'A. ha eseguito nuove esperienze, determinando i pesi necessari a fare immergere nell'acqua pura un areometro che aveva la porzione cilindrica superiormente tagliata secondo un piano, che con opportune disposizioni, si manteneva sempre orizzontale, e fino a che il menisco a contatto con l'orlo superiore del cilindro, da concavo non diveniva perfettamente piano. Egli ha così trovato che il peso necessario a produrre una depressione determinata è minore di quello che si deduce dalla teoria; e queste divergenze le ritiene dovute a quella parte della teoria che si riferisce alla superficie di contatto fra i solidi e i liquidi.

V. BJERKNES. *Sul fenomeno della risonanza multipla delle onde elettriche*. — Secondo Sarasin e De La Rive, l'eccitatore di Hertz dovrebbe emettere, analogamente al sole, onde di tutte le lunghezze possibili, che sarebbero poi rese separatamente evidenti con risonatori diversi.

In una Nota precedente, il cui riassunto fu pubblicato anche nei *Compt. Rend.* 1891, (cfr. *N. Cim.* 31, pag. 74) l'A. studiò lo

smorzamento che subiscono le oscillazioni elettriche e pel conduttore primario trovò il decremento logaritmico  $\gamma = 0,26$ ; per quello secondario il decremento logaritmico sarebbe  $\delta = 0,002$ . Ora questi valori applicati allo studio delle onde stazionarie e della loro determinazione mediante un risonatore, conducono alle stesse conseguenze sperimentali dei due fisici ginevrini, senza bisogno di partire dalla loro ipotesi.

Infatti, il conduttore secondario deve mostrare due sistemi di massimi e minimi, uno assai più evidente dell'altro, come si deduce dalle seguenti considerazioni. Le oscillazioni primarie producono delle onde stazionarie che, a motivo del forte loro smorzamento, sono molto incomplete. Il risonatore deve perciò manifestare un corrispondente sistema, incompletamente definito, di massimi e minimi, la cui lunghezza d'onda deve corrispondere alle onde realmente esistenti. Il primo sistema deve frattanto esser mascherato da un altro la cui produzione si spiega come segue: Ogni massimo dell'onda comunica al risonatore due impulsi, uno prima, l'altro dopo la riflessione. Il secondo impulso rinforza o indebolisce l'azione del primo, secondo che il risonatore nel frattempo ha compiuto un numero pari o dispari di mezze ondulazioni. Il risonatore sarà eccitato più o meno intensamente, secondo che la sua distanza dallo specchio è un multiplo pari o dispari di quelle lunghezze d'onda che corrispondono alle sue proprie vibrazioni.

Quest'ultimo sistema di massimi e minimi è tanto più evidente, quanto più le oscillazioni primarie sono smorzate in confronto di quelle secondarie. Ora, quantunque i valori sopra indicati di  $\gamma$  e di  $\delta$  non sieno assolutamente esatti, niente è cambiato nelle parti essenziali di queste considerazioni anche se  $\delta$  fosse dieci volte maggiore di quanto sopra è detto, purchè rimanga notevolmente minore di  $\gamma$ . Se dunque si fa astrazione dal primo sistema di massimi e minimi, che è insignificante, si giunge al risultato di Sarasin e De la Rive. La spiegazione della risonanza multipla è dunque possibile anche ritenendo che l'oscillazione dell'eccitatore sia unica.

Questi risultati concordano con quelli ottenuti dal Poincaré (cfr. *N. Cim.* 31, pag. 83).

R. COLLEY. *Apparecchio per l'osservazione delle lente oscillazioni elettriche.* — L' A. descrive un perfezionamento dell'oscilometro che fece conoscere nel 1885 (*N. Cim.* 20, pag. 162). Il nuovo apparecchio, costruito da Th. Edelmann consiste in una combinazione del moto oscillante di un leggerissimo specchio magnetico, col moto rettilineo di un punto luminoso, di cui si osserva

l'immagine riflessa dallo specchio. Questo specchio si trova nell'interno di un rocchetto, nel cui circuito si propagano le ondulazioni elettriche, ottenute con l'aiuto di condensatori da un rocchetto indotto.

R. COLLEY. *Sulla teoria del rocchetto di Ruhmkorff*. — L' A. studia come varia la corrente nel circuito indotto dopo l'interruzione della corrente inducente, e tratta i due casi del circuito indotto aperto e chiuso. Pel caso del circuito chiuso, trascurando l'induzione del circuito secondario su quello primario, integrando le equazioni differenziali giunge alla relazione

$$i = \frac{Mi_0}{L} \left( -e^{-2\gamma t} + e^{-\gamma t} \cos \beta t \right).$$

Osservando col metodo degli specchi rotanti la scintilla in un tubo di Geissler, l' A. trovò infatti che nel circuito indotto si ha la sovrapposizione di due correnti una periodica e l'altra aperiodica, come è indicato dalla relazione precedente.

F. NARR. *Sulla dispersione dell'elettricità*. — In occasione di alcune sue ricerche, l' A. ha constatato che la dispersione dell'elettricità di una sfera metallica isolata è quasi la stessa tanto se la sfera è tenuta alla temperatura ordinaria, quanto se è riscaldata a 100° c.; e poichè in quest'ultimo caso le correnti convettive attorno alla sfera debbono essere molto più intense, bisogna concludere che il gaz ambiente e le particelle di polvere che vi son sospese prendono poca parte alla dispersione dell'elettricità.

C. FROMME. *Ricerche magnetiche sperimentali*. — In questa sesta nota l' A. studia l'influenza che la velocità, con la quale diminuisce la forza magnetizzante, esercita sulla grandezza del momento permanente di un nucleo di ferro o di acciaio.

Per poter ottenere risultati scevri da obiezioni, l' A. sottoponeva un fascio di fili di ferro isolati ad una forza magnetizzante molto intensa che, ridotta lentamente a zero, coll'introduzione di una resistenza liquida, priva di polarizzazione, nel circuito della corrente magnetizzante, produceva un momento permanente PM. Di poi faceva agire una forza minore, che cambiava di  $\pm \delta_1$  PM quel momento, se si riduceva lentamente a zero; dopo di ciò faceva agire nuovamente la forza più intensa, che produceva PM, e quindi nuovamente la forza minore, ma che ora riduceva rapidamente a zero, e determinava il cambiamento  $\delta_2$  PM così ottenuto. Interrompendo la corrente magnetizzante in modo che l'extra-corrente di apertura circolasse soltanto nella direzione della corrente magnetizzante, se si trova  $\delta_1$  PM diverso da  $\delta_2$  PM vuol dire che, essendo escluse le correnti indotte nella massa del nucleo,

la grandezza del momento permanente è realmente influenzata dalla velocità con cui avviene la magnetizzazione.

I risultati ottenuti dall' A. sono i seguenti.

Quanto più rapidamente la forza magnetizzante si annulla, tanto minore è il momento del magnetismo residuo, anche se si impediscono le correnti indotte nella massa del nucleo, e le oscillazioni dell' extracorrente. Questo fatto conferma l' ipotesi dei magneti molecolari girevoli, che sola può servire a spiegarlo.

Il momento magnetico residuo è minore anche se la prima parte soltanto della diminuzione della forza magnetizzante è rapida, e l' ultima parte è lenta.

Se il nucleo magnetico è circondato da un tubo metallico chiuso o da una spirale metallica chiusa, la differenza fra il momento permanente dovuto alla lenta e quello dovuto alla rapida diminuzione della forza magnetizzante è più piccola, sparisce quasi affatto per i fasci dei fili e per le sbarre d' acciaio, per le sbarre di ferro invece è sempre notevole. Tubi metallici tagliati longitudinalmente agiscono come quelli chiusi, ma specialmente per i fasci di fili, e per le sbarre d' acciaio, non per le sbarre di ferro. Le spirali metalliche aperte invece sono affatto senza azione.

TH. LOHNSTEIN. *Osservazioni ad una esperienza del sig. von Bezold sulla polarizzazione dielettrica.* — L' esperienza del Bezold si riferiva alla refrazione delle linee di forza elettriche (cfr. N. Cim. 15, pag. 170); e l' A. osserva che non è esatto ammettere, come fece il Bezold, che le linee di forza che partono da una sfera conduttrice posta in un mezzo coibente a contatto di un altro coibente sieno rettilinee nel primo mezzo, e che invece sieno curve nei due coibenti, ed indica come dovrebbe condursi l' esperienza pel caso che la sfera conduttrice si riducesse a un punto.

W. MAREK. *Dilatazione dell' acqua.* — L' A. pubblica in una tavola i valori della densità dell' acqua contenente aria, a temperature fra  $-0,1$  e  $32^\circ$  della scala termometrica del termometro a idrogeno stabilita dalla conferenza generale dei pesi e misure nel 1889, alla pressione di 760 mm. di mercurio, riferita alla densità massima dell' acqua priva di aria e alla medesima pressione, per ogni decimo di grado.

Le differenze fra la densità  $D_{r'}$  dell' acqua contenente aria e quella  $D_r$  dell' acqua priva d' aria, per le temperature  $\tau$  sottoindicate sono:

$\tau^\circ$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^7 (D_{r'} - D_r)$	25	27	29	31	32	33	33	34	34	33	32
$\tau^\circ$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	32
$10^7 (D_{r'} - D_r)$	31	29	27	25	22	19	16	12	8	4	insensibile.



G. ADLER. *Su una conseguenza della teoria Poisson-Mossotti.*

— La teoria Poisson-Mossotti della polarizzazione dielettrica e magnetica, fa dipendere il coefficiente  $k$  d'induzione magnetica, e la costante dielettrica  $K = 1 + 4\pi k$ , dalla frazione  $g$  dell'unità di volume che è effettivamente occupato dalle molecole della sostanza polarizzabile; in ambedue i casi infatti si ha

$$(1) \quad k = \frac{3g}{4\pi(1-g)} \quad \text{con} \quad g = \frac{e}{v}.$$

L' A. differenzia questa espressione rispetto al volume  $v$  occupato dalla sostanza, e introduce una nuova costante  $k'$  analoga a quanto fecero Helmholtz e Kirchhoff per lo studio delle pressioni nei corpi magnetici e dielettrici, definita da

$$k' = \frac{dk}{d \log v}$$

osservando allora che si ha dalla  $g = \frac{e}{v}$  :

$$\frac{dk}{d \log v} = \frac{dk}{dg} \frac{dg}{d \log v} = -g \frac{dk}{dg},$$

e servendosi della formula (1) di Poisson, trova

$$k' = -k \left( 1 + \frac{4\pi k}{3} \right).$$

Se invece si facesse uso della formula

$$k = \frac{3g}{4\pi(1-3g)}$$

proposta dal Betti, si avrebbe

$$k' = -k(1 + 4\pi k)$$

ed ambedue queste espressioni mostrano che  $k$  e  $k'$  diminuiscono all'aumentar del volume.

Traendo perciò profitto dai risultati sperimentali sulla dipendenza fra  $k$  e l'aumento di volume, si può decidere se sia da preferirsi la formula di Poisson o quella del Betti. Questi confronti potrebbero far ritenere che la formula del Poisson fosse molto approssimata per i gas; ma non per i liquidi, pei quali non varrebbe nè quella di Poisson nè quella del Betti, perchè pei liquidi  $k$  sembra una costante empirica.

L'uso fatto da molti della (1) per dedurre il volume reale delle molecole, sarebbe perciò permesso soltanto per i gas; per gli altri corpi non condurrebbe a risultati precisi.

A. WINKELMANN. *Sulla conduttività termica dei gas.* — A motivo della notevole divergenza fra i valori ottenuti nel 1875 dall' A. per la conduttività dei gas pel calore, e quelli più recenti dello Schleiermacher l' A. ha ritenuto opportuno di riprendere lo studio di queste proprietà per l'aria l'idrogeno e l'anidride carbonica.

Tenendo conto dell'influenza che la pressione esercita sulla conduttività termica dei gas, e di quella che può esercitare la profondità alla quale l'apparecchio usato è immerso nell'acqua bollente, l' A. trova che la conduttività a 0° è in c. g. s. e per 1° c.

per l'aria	0,000 055 5
» l'idrogeno	0,000 382 9
» la CO <sub>2</sub>	0,000 032 7.

Questi valori concordano assai bene con quelli di Schleiermacher, eccetto per l'idrogeno pel quale si ha una differenza del 7 %.

Avendo poi determinato i coefficienti della variazione per la temperatura in modo indipendente, e senza partire dall'ipotesi che quello dell'aria sia uguale a quello dell'idrogeno, trovò i valori

per l'aria	0,001 90
» l'idrogeno	0,001 75
» la CO <sub>2</sub>	0,004 01

che concordano con quelli che egli aveva ottenuti precedentemente, e con quelli di Eichhorn; ma che differiscono notevolmente da quelli di Schleiermacher, il quale trovò valori assai maggiori.

L. ARONS e H. RUBENS. *Velocità di propagazione delle onde elettriche in alcuni coibenti solidi.* — Per il valore eccezionalmente alto che è stato trovato per la costante dielettrica dell'acqua (80) e dell'alcole (25) sarebbe stato interessante conoscere anche la velocità di propagazione delle onde elettriche in quei liquidi, e perciò gli A. fecero in proposito delle ricerche collo stesso metodo già usato per i liquidi coibenti (cfr. N. Cim. 31, pag. 184); ma per l'acqua non poterono ottenere alcun risultato perchè essa si comporta come un corpo metallico; per l'alcole poterono osservare che esso riflette una parte notevole delle onde

elettriche, ma che pure si lascia anche attraversare da una parte non indifferente delle medesime onde.

Il metodo usato portò invece a risultati decisivi per la paraffina e pel vetro. La paraffina fu fatta fondere nel recipiente che nelle prime esperienze serviva a ricevere i liquidi, e fu studiata quando era sempre liquida, quando era solidificata ma trasparente, e quando era solida e opaca; e fu studiata anche in lastre sovrapposte, ma con risultati incerti a motivo degli strati d'aria che vi rimanevano. Pel vetro furono usate lastre da specchi di 7,5 mm. e di 2 mm. di spessore, e per esso fu determinata la costante dielettrica  $\mu$  col metodo di Schiller e l'indice di refrazione  $n$  con un refrattometro di Abbe.

I risultati ottenuti confermano pienamente la relazione del Maxwell  $n^2 = \mu$ , come si vede dalla seguente tabella

	$\mu$	$\sqrt{\mu}$	Valori di $n$	
			$\lambda = 6 \text{ m.}$	$\lambda = 6.10^{-7} \text{ m.}$
Paraffina liquida	1,98	1,41	1,47	da 1,48 a 1,53
» che solidifica	2,08	1,44	1,48	
» solida	1,95	1,40	1,43	
Vetro I	5,37	2,32	2,33	1,51
Vetro II	5,90	2,43	2,49	1,53

J. VANNI. *Sull'apparente variabilità dell'equivalente elettrochimico del rame.* — Secondo il Gray, l'equivalente elettrochimico del rame dipenderebbe dalla densità della corrente adoprata per determinarlo, e come causa di questa variabilità sarebbe indicata l'azione dissolvante che il solfato di rame esercita sulle lastre di rame che vi sono immerse. L'A. ha fatto delle esperienze per verificare l'esattezza di questa spiegazione, ed ha riconosciuto che infatti essa è vera; perchè se si impedisce che il rame si sciogla nel suo solfato, l'equivalente elettrochimico risulta costante per qualunque densità di corrente. Per impedire che il rame si sciogla, basta adoprare un miscuglio di 1 litro della soluzione normale di  $\text{Cu SO}_4$  fatta con solfato puro, cristallizzato due volte, e di  $\frac{1}{2}$  grammo della soluzione ordinaria di solfato di rame, che contiene circa 1% di acido libero.

W. SHREADER. *Sulla resistenza alla diffusione per le correnti elettriche, che si propagano dalla base di un cilindro in uno spazio più esteso.* — Per tener conto di quella resistenza, Maxwell

aveva trovato teoricamente che nel caso che lo spazio ambiente fosse della stessa sostanza di cui era formato il cilindro, bisognava aumentare la resistenza di una quantità uguale alla resistenza di un cilindro di lunghezza  $na$ , essendo  $n$  il raggio della base, ed  $a$  un numero compreso fra 0,785 e 0,849. Il Rayleigh indicò per  $n$  il valore 0,8242; e Mascart, de Nerville e Benoist, nelle loro esperienze per la determinazione dell'ohm, trovarono sperimentalmente il valore  $n = 0,823$  pel mercurio.

L' A. ha eseguito delle esperienze per trovare questo valore di  $n$  pel mercurio e per una soluzione di  $\text{KHSO}_4$ . Il metodo usato fu quello stesso del Mascart, di rompere cioè un tubo capillare pieno della sostanza studiata, entro un bagno o di mercurio o dell'elettrolita, e di determinare gli aumenti di resistenza che così si avevano. Egli trovò che il valore di  $n$  è per il mercurio 0,804 e per la soluzione di  $\text{KHSO}_4$  è 0,805.

La resistenza alla diffusione da un cilindro di raggio  $a$  equivale quindi ad un aumento di  $0,805 a$  della lunghezza del cilindro.

E. PFEIFFER. *Azione dell'acqua sul vetro, e su un metodo elettrico per studiarla.* — L' A. volle provare se la misura della conduttività elettrica dell'acqua distillata lasciata per tempi diversi entro recipienti di vetro, poteva servire a studiare l'azione dell'acqua sul vetro, e riconobbe che ciò serve benissimo per determinare la quantità del vetro disciolto. Così fra altri risultati trovò che se si studia la solubilità del vetro a diverse temperature, per temperature crescenti in progressione aritmetica, la solubilità cresceva assai più rapidamente dei termini di una progressione geometrica.

J. FERCHÉ. *Su alcune proprietà fisiche del benzolo.* — Sono state studiate le curve della fusione del vapore di benzolo sul benzolo solido e su quello liquido in vicinanza del punto di fusione, e la variazione del punto di fusione colla pressione.

Come si deduce dalla teoria di Kirchhoff, l' A. ha constatato che le curve della tensione pel benzolo liquido son diverse da quelle pel benzolo solido, e che ambedue si tagliano nel punto di fusione. La differenza fra le derivate della tensione rispetto alla temperatura nel punto di fusione fu trovata 0,524, mentre la teoria dà 0,541. Così l' A. trova gli stessi risultati di Ramsay e Young. Il risultato diverso ottenuto dal Fischer (cfr. *N. Cim.* 22, pag. 173) potrebbe attribuirsi al fatto che il benzolo da esso usato non fosse affatto scevro di tiofene.

Quanto alla variazione della temperatura  $T$  di fusione colla pressione, l' A. trova  $dT/dp = 0,02965$ ; mentre dalla teoria del

Clausius si deduce il valore 0,029596 abbastanza concordante col precedente.

P. LEBEDEV. *Su delle misure della capacità specifica induttiva dei vapori, e sulla teoria Mossotti-Clausius dei dielettrici.* — Per trovare la costante dielettrica di un vapore, l'A. determinava il rapporto fra la capacità di due condensatori quasi uguali, di cui uno aveva una capacità costante, e l'altro aveva per dielettrico una volta l'aria e una volta il vapore studiato. Il rapporto delle capacità fu determinato col metodo Hopkinson alquanto modificato, che permetteva una precisione  $\pm 0,0,1$  ed è indipendente dalla capacità e dal residuo dei conduttori usati.

Quanto alla teoria di Mossotti e Clausius, l'A. osserva che la relazione da essi proposta

$$g = \frac{K - 1}{K + 2}$$

che lega la costante dielettrica  $K$  di un coibente col rapporto  $g$  fra lo spazio occupato realmente dalle molecole e quello occupato da tutto il corpo, e che conduce all'altra

$$\frac{K + 2}{K - 1} d = \text{cost}$$

ove  $d$  è la densità del corpo, può essere con vantaggio adoprata come formula empirica; e che inoltre l'ipotesi di Faraday, che le molecole dei corpi sieno conduttrici o quella di Mascart e Joubert che le molecole abbiano una costante dielettrica grandissima, non conducono a nessuna contraddizione coi fatti osservati, e anzi li spiegano nel modo più semplice.

E. LOMMEL. *Sulla direzione delle vibrazioni nella luce polarizzata.* — In seguito alle note esperienze del Wiener e alla discussione cui esse hanno dato luogo, l'A. richiama le esperienze che pubblicò nel 1879 (*Wied. Ann.* 8, pag. 634) sui fenomeni di dicroismo che presenta il cianuro di platino e magnesio cristallizzato.

Colla luce polarizzata si riconosce che se la normale al piano di polarizzazione rimane perpendicolare all'asse del cristallo, per quanto si faccia cambiare l'angolo d'incidenza che il raggio luminoso fa colla base del cristallo, la fluorescenza resta invariata; mentre se si fa cambiare l'angolo fra l'asse del cristallo e la normale al piano di polarizzazione, cambia anche il colore della luce fluorescente.

Perciò l'A. conclude che le vibrazioni che eccitano la fluorescenza di un raggio polarizzato rettilineamente sono normali al piano di polarizzazione. E poichè la luce fluorescente è polarizzata parallelamente a quella incidente, anche l'eccitazione luminosa nel nostro occhio deve esser prodotta da vibrazioni normali al piano di polarizzazione. D'altra parte secondo il Wiener vale lo stesso per le azioni chimiche della luce; quindi si può dedurre da tutto ciò che le vibrazioni luminose sono perpendicolari al piano di polarizzazione.

Essendo i fenomeni di fluorescenza indipendenti dalla direzione secondo cui il movimento luminoso è comunicato al cristallo, l'azione della luce deve essere anche indipendente dalla grandezza periodicamente variabile (pressione, rotazione, scorrimento) che determina la propagazione lungo il raggio luminoso, e che è normale al piano determinato dalla direzione del raggio e da quella dello spostamento. L'azione della luce dipende quindi soltanto dallo spostamento. Ed avendo mostrato che tale azione dipende soltanto dalla normale al piano di polarizzazione, l'A. conclude che gli spostamenti del mezzo che serve a propagar la luce sono le vibrazioni proprie della luce, e che questi avvengono normalmente al piano di polarizzazione.

C. BOHR e J. BOCK. *Determinazione dell'assorbimento di alcuni gas nell'acqua per temperature fra 0 e 100°.*

È una revisione delle ricerche di Bunsen sull'assorbimento dei gas, in parte con nuovi mezzi per estenderle a temperature elevate, in parte raccogliendo i risultati ottenuti da altri.

V. DVORAK. *Sulla teoria dell'interruttore automatico della corrente.* — Nell'antica teoria di questo apparecchio, non si teneva alcun conto dell'azione che l'elettromagnete esercita sull'ancora durante il ritorno di questa nella posizione di riposo. Ora l'A. considera tutte le azioni che influiscono sulle vibrazioni del martello, e cioè: la durata del contatto, l'autoinduzione, l'azione del ferro, le dimensioni del nucleo, e l'isteresi magnetica, per stabilir poi una teoria completa del martello di Wagner.

Calcolando l'energia necessaria a mantenere in vibrazione un interruttore del tipo Elsas, basato sulle vibrazioni di torsione di un filo metallico (*N. Cim.* 28 pag. 92), l'A. trova che soltanto l'1% circa della energia elettrica è impiegata a mantenere le vibrazioni, e quindi tali apparecchi sono fra i motori più svantaggiosi.

A motivo di questa piccolezza dell'energia necessaria a mantenere le vibrazioni, la resistenza della pila deve esser piccola, per es. 0,1 a 0,2 ohm come si ha negli elementi Berliner-Leclan-

chè. Non deve esser grande nemmeno la resistenza dell' elettromagnete. Per aumentare poi l' ampiezza di vibrazione del martello, è molto utile una derivazione sull' elettromagnete, e meglio ancora una disposizione che permetta di far circolare l' estracorrente di chiusura, chiudendo su sè stesso il circuito dell' elettromagnete al momento in cui s' interrompe quello della pila. Si può usare con qualche vantaggio anche una spirale secondaria avvolta sul nucleo e chiusa su se stessa; perchè la corrente indotta, che si produce in essa al cessare della corrente della pila, magnetizza ancora il nucleo e ne prolunga l' azione sull' ancora.

M. PLANCK. *Sul principio dell' aumento dell' entropia* — Continuando i suoi studi (cfr. *N. Cim.* 24, pag. 90), in questa sua quarta memoria l' A. considera le leggi dell' equilibrio elettrochimico, e confronta i risultati ottenuti con quelli della teoria di Lippmann, di Helmholtz e del Warburg; ma non è possibile un breve riassunto di queste discussioni.

G. MARKOVSKY. *Sulla f. e. m. delle pile a gas*. — Secondo Grove la corrente delle pile a gas sarebbe dovuta alla combinazione dell' idrogeno coll' ossigeno; mentre Warburg ritiene che sia dovuta all' azione del gas sul metallo degli elettrodi, che si scioglie sempre nell' elettrolito. L' A. ha eseguito delle misure sulle f. e. m. di quelle pile, che è necessario conoscere esattamente prima di decidere fra le teorie su accennate, e ha trovato che la f. e. m. di una lamina di platino ricoperta di idrogeno accoppiata con una lamina di platino nell' acido solforico privo di gas è minore di quello che è stato fin qui ritenuto. Infatti, secondo Macaluso sarebbe 0,74 V; secondo Beetz 0,89 V; mentre escludendo affatto l' aria dall' acido solforico l' A. la trovò di 0,646 V. Se la lamina di platino è rivestita di ossigeno, si ha invece la f. e. m. di 0,372 V.

L' azione dell' ossigeno e dell' idrogeno resi liberi elettroliticamente, è uguale a quella dei medesimi gas ottenuti chimicamente, e la f. e. m. di tali pile è indipendente dalla pressione e dalla temperatura del gas, almeno entro i limiti delle esperienze eseguite dall' A. fra 20 mm. e 2 atmosfere e mezzo, e fra 0 e 70° c.

Gli elettrodi di carbone, sia nelle pile a gas, sia per la polarizzazione con una corrente, funzionano in modo affatto diverso da quelli di platino.

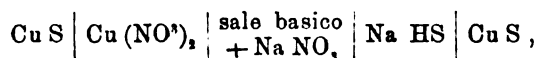
F. BRAUN. *Sull' elettrostenolisi*. — In una precedente Nota (*Wied. Ann.* 42 pag. 450) l' A. aveva chiamato col nome di elettrostenolisi il fenomeno che presenta una fenditura che si trovi in una parete sottile isolante, che separi in due parti un liquido

elettrolitico: se a traverso il liquido si fa passare una corrente elettrica, per mezzo di reofori posti nei due scompartimenti del liquido, sulla fenditura si deposita il metallo, come se essa funzionasse da elettrodo, e l'azione non dipende dalla quantità di elettricità, ma dall'intensità della corrente. Per produrre l'elettrostenolisi è sempre necessaria una grande f. e. m.

Ora l'A. descrive moltissimi fenomeni di questo genere, e cerca di spiegarli, avendo trovato che per l'elettrostenolisi è necessaria la presenza di una incrinatura, perchè con un sottilissimo foro non si presenta; e poichè la f. e. m. necessaria a produrla è diversa per le diverse fenditure, ne deduce che questo fenomeno non può avere analogia con quelli della dissociazione termica. Non può esser dovuta nemmeno a un trasporto meccanico di particelle metalliche da un elettrodo all'altro, perchè si presenta anche se al liquido si aggiunge tanta gelatina da renderlo consistente quando sia freddo. Nemmeno può suppersi che la parete funzioni come un corpo conduttore, perchè analogamente al vetro e alla mica funziona anche un foglio di carta paraffinata provvisto di una fenditura.

Il fenomeno si presenta anche per correnti di breve durata, come quelle che posson aversi dalle scariche delle bottiglie di Leida.

✕ F. BRAUN. *Sulle relazioni elettrocapillari*. — E. Becquerel aveva osservato che se in un tubo di vetro si fa una sottile fessura, (larga al più 0,06 mm.) e se il tubo, pieno di una soluzione concentrata di solfuro sodico, s'immerge in una soluzione concentrata di nitrato di rame, al contorno della fessura si deposita, dopo un po' di tempo, del rame metallico, che si ricopre poi di un velo di ossidulo di rame. Becquerel credeva che o il liquido penetrato nello spazio capillare, o che le pareti del tubo, funzionassero come un conduttore metallico; ma già Ostwald aveva sollevato in proposito delle obiezioni. Ora l'A. escluso, per ricerche dirette, che si tratti di elettrostenolisi, ritiene che la spiegazione del fenomeno di Becquerel si debba ricercare nel fatto, constatato anche direttamente, che pel contatto fra le due soluzioni si formi la combinazione voltaica



avendo trovato, d'accordo con Hittorf, che il solfuro di rame ha una conduttività metallica relativamente buona.

V. BJERKNES. *Sul movimento dell'elettricità nell'eccitatore di Hertz*. — Poichè le esperienze di Hertz s'interpretano nel modo più semplice ammettendo che il movimento dell'elettricità nell'ec-



citatore sia ondulatorio, e poichè la durata del fenomeno essendo immensamente corta si deve ammettere un fortissimo smorzamento, l'ipotesi più semplice che possa farsi sulla natura di tal movimento è che esso sia analogo al moto di un pendolo in un mezzo resistente, e che quindi, prendendo per variabile indipendente il tempo  $t$ , lo stato elettrico dell'eccitatore sia dato dalla funzione

$$(1) \quad F(t) = A e^{-\alpha t} \sin(at + \alpha').$$

Ma se questa ipotesi è la più semplice, non si può dire a priori che sia la sola vera; e altre ne sono state fatte: Sarasin e De La Rive hanno ritenuto la  $F$  come somma d' un' infinità di oscillazioni semplici a periodi diversi, Cornu dubita assolutamente che l'eccitatore abbia un periodo ben definito, e Hagenbach e Zehnder (*N. Cim.* 31, pag. 188) negano completamente il carattere oscillatorio del movimento, sostituendovi un movimento a scosse che ha sempre luogo nello stesso senso.

Per poter decidere sulla natura di tal movimento, l'A. è partito da questo principio: Si faccia propagare lungo un filo rettilineo indefinito la perturbazione prodotta dal movimento  $F(t)$  nell'eccitatore. La distribuzione di questa perturbazione in un istante dato, espressa in funzione di una coordinata presa lungo il filo, sarà rappresentata essenzialmente dalla stessa funzione  $F$  nella quale a  $t$  si sostituirà quella coordinata. Il problema si riduce dunque a determinare tal distribuzione: e se non è possibile risolverlo direttamente, si può averne la soluzione in un modo indiretto. Infatti, se il filo ha un'estremità libera isolata, a questa estremità vi sarà riflessione e si avranno delle interferenze fra la perturbazione incidente e quella riflessa. Allora si potranno eseguire delle misure elettrometriche dello stato elettrico dei differenti punti del filo; e se si prende per ascissa la distanza dal punto considerato all'estremità del filo, e per ordinata la deviazione dell'elettrometro, si avrà una certa curva, che caratterizza quello stato d'interferenza. Non resta allora che di esaminare in qual modo tal curva d'interferenza si accorda con le differenti ipotesi che posson farsi sulla forma della funzione  $F$ .

Se si ammette l'ipotesi (1) l'A. mostra come la deviazione dell'elettrometro deve essere espressa da

$$(2) \quad J = K_1 \pm K e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\alpha_1 x - k)$$

ove

$$K_1 = K \cos k, \quad k = \arctg \frac{\alpha_1}{a_1}$$

e se si considera  $J$  come una ordinata, la (2) rappresenta una curva sinuosa che oscilla con ampiezze sempre decrescenti attorno alla retta  $y = K$ .

Le esperienze furon fatte con un elettrometro, consistente in due soli quadranti diametralmente opposti e in un ago di Thomson. Davanti alle lastre dell'eccitatore erano altre due lastre uguali, da cui partivano due fili, distanti 5 cm. fra loro, che dopo aver percorsa una lunghezza di circa 130 m. in un giardino, rientravano nella sala delle esperienze. Questa parte ultima dei fili poteva spostarsi in modo da condurre due loro punti qualunque a contatto coi quadranti dell'elettrometro. Per le onde che si propagavano nei fili, i due quadranti avevan sempre elettricità di segni contrari, e l'ago era sempre attirato dai quadranti. Come controllo, quando i fili erano riuniti per la loro estremità, l'ago non deviava affatto; invece deviava appena si separavano le estremità dei fili; e non deviava quando, pur essendo i due fili isolati, le sfere dell'eccitatore erano allontanate in modo da non aver più scintille.

Eseguito le misure, e rappresentando graficamente le deviazioni elettrometriche, l'A. ottenne una curva a quattro onde, di ampiezze decrescenti, la cui forma è del tutto simile a quella rappresentata dalla (2). Come l'A. lo fa notare nella traduzione di questo suo lavoro che ha pubblicato negli *Archives de Genève*, se si supponesse, come fecero Sarasin e de la Rive, che la  $F$  fosse una somma di termini periodici a periodi diversi, anche la curva d'interferenza mostrerebbe lo stesso numero di periodi diversi; mentre l'esperienza non fa conoscere che un solo periodo: dunque le altre oscillazioni, se pur esistono devon avere un'intensità piccolissima; e d'altronde è ormai noto che, come hanno mostrato l'A. stesso e il Poincaré, le esperienze di quei due fisici si spiegano anche nell'ipotesi dalla forma (1) della  $F$ . Se si ammettesse l'ipotesi di Hagenbach e Zehnder, la  $F$  dovrebbe essere una funzione sempre dello stesso segno, decrescente continuamente in valore assoluto; secondo il carattere della riflessione, la curva d'interferenza dovrebbe avere le sue ordinate o sempre crescenti fino a un massimo, o sempre decrescenti fino a un minimo, e non potrebbe mai coincidere con quella data dall'esperienza.

L'A. chiude questo lavoro mostrando come si possa anche tentare di dedurre la forma della funzione  $F$  senza partire da nessuna ipotesi, ma basandosi soltanto sui dati sperimentali. Infatti, con semplici considerazioni egli mostra come la funzione  $J$  che esprime la deviazione dell'elettrometro deve avere la forma  $\Phi(2x)$ , e che se  $F(t)$  rappresenta il moto dell'elettricità nell'eccitatore, deve essere

$$(3) \quad \Phi(2x) = \int_{\frac{x}{v}}^x F(vt+x) F(vt-x) dt.$$

Data la  $F$ , la  $\Phi$  risulta determinata senza ambiguità: ma il problema che c'interessa è l'inverso di questo: la  $\Phi$  è determinata direttamente dall'esperienza, e si tratta di risolvere la (3) rispetto alla  $F$ .

L'A. ha mostrato, come si è visto, che la  $\Phi$  ha, almeno approssimativamente, la forma  $Ke^{-2ax} \cos(2ax - k)$ ; e in questo caso la (3) ammette come soluzione una funzione  $F$  della forma (1). Il problema del moto dell'elettricità nell'eccitatore sarebbe dunque completamente risoluto, se si potesse dimostrare che tal soluzione è la sola possibile.

K. WAITZ. *Sulla misura della velocità di propagazione delle onde elettriche nei diversi dielettrici.* — Le misure fatte già dall'A. col metodo di derivazione descritto in un precedente lavoro (cfr. *N. Cim.* 30, pag. 93) e quella di Arons e Rubens (v. sopra pag. 78) danno pel petrolio la verifica della legge di Maxwell  $n^2 = \mu$ ; mentre per l'olio di ricino l'A. trovava valori discordanti da questa legge. Egli avverte perciò che i risultati così ottenuti devon accettarsi con molta riserva, perchè ha constatato che si hanno risultati affatto diversi a seconda della posizione che ha la parte del filo circondata dal dielettrico che si studia. Per es. pel toluolo l'indice di refrazione delle onde elettriche sarebbe 1,06 se la parte di filo anzidetta è prossima a un ventre, e sarebbe 1,48 se è prossima a un nodo di oscillazione. Quindi occorre, per determinar con sicurezza il valore di  $\mu$ , che le onde si propaghino per tutta la loro lunghezza nel dielettrico studiato, ciò che può ottenersi coll'indicato metodo di derivazione già usato dall'A.; il quale si propone di pubblicare in seguito altri studi su questo soggetto.

Alle obiezioni mosse al loro metodo, Arons e Rubens nel fascicolo 2° del vol. XLV rispondono di non aver trovato diversità nella posizione del punto indifferente, facendo scorrere la cassetta contenente il liquido coibente su diverse porzioni del conduttore: soltanto il minimo delle scintille era meno distinto quando la cassetta era prossima ad un'estremità del conduttore; ed essi ponevano la cassetta in quella posizione per la quale quel minimo si presentava più nettamente.

A. HEYDWEILLER. *Elettrodinamometro assoluto per correnti molto intense.* — Servendosi della disposizione dei rocchetti usata

da Lord Rayleigh, l'A. ha costruito un elettrolinamometro per la misura di correnti al disopra di 0,5 A. con un'esattezza di  $\frac{1}{1000}$ .

Mantenendo la disposizione relativa dei tre rocchetti della bilancia del Rayleigh, l'A. dispone verticalmente i piani delle loro spire, e sospende il rocchetto più piccolo su un asse orizzontale che passa pel piano medio delle sue spire. Quando passa la corrente  $i$  questo rocchetto subisce un momento di rotazione attorno al detto asse, che è uguale al prodotto della forza elettrodinamica per la distanza  $l$  dal centro del rocchetto all'asse di rotazione e quindi il rocchetto è deviato di un certo angolo  $\phi$  dalla posizione di riposo, finchè non è equilibrato dal momento di rotazione dovuto alla gravità; e allora si ha, per piccoli valori di  $\phi$ :

$$i^2 f n (N_1 + N_2) l = g m l \sin \phi,$$

da cui

$$i^2 = \frac{g m}{f n (N_1 + N_2)} \sin \phi,$$

essendo  $g$  l'accelerazione della gravità,  $m$  il peso del rocchetto,  $n$ ,  $N_1$  e  $N_2$  i numeri delle spire nel rocchetto piccolo e nei due altri, ed  $f$  una funzione i cui valori son calcolati nelle tabelle date dal Rayleigh per la sua bilancia (*Phil. Trans.* 175 (2), pag. 411, 1834).

Per non fare oltrepassare a  $\phi$  un dato valore, si può unire all'asse di rotazione un leggero braccio orizzontale munito di un piccolo piatto, e porre su questo dei pesi opportuni. Se  $\psi$  è l'angolo di cui questi pesi da soli, senza corrente, fanno deviare il rocchetto, si ha:

$$i^2 = \frac{g m}{f u (N_1 + N_2)} (\sin \phi + \tan \psi \cos \phi)$$

Variazioni di alcuni centigrammi nel peso del rocchetto mobile, non hanno influenza sensibile sulla misura della corrente.

Nella costruzione dei rocchetti è raccomandabile l'uso dei nastri metallici proposti dal Buff. Con questi si ha un avvolgimento assai più regolare e una prova più perfetta dell'isolamento che coi fili ordinariamente usati.

L'A. indica le correzioni che devon farsi alla formula sopra riportata a motivo delle diverse cause che influiscono sulla deviazione del rocchetto mobile, e dà la formula cui si giunge dopo tutte quelle correzioni; e termina facendo notare che un altro vantaggio che il suo apparecchio ha sulla bilancia del Rayleigh, è quello di non richiedere nessuna misura geometrica della su-

perficie d'avvolgimento delle spirali, bastando il loro confronto col metodo galvanometrico.

H. PELLAT. *Risposta alla critica del sig. F. Braun sulla uguaglianza del potenziale al passaggio da un metallo a una soluzione di un suo sale.* — L'A. risponde alle obiezioni del Braun (cfr. *N. Cim.* 30 pag. 94) facendo notare che tanto quelle dedotte da principii teorici, quanto quelle dedotte dalle esperienze fatte dal Braun non infirmano la legge indicata dal Pellat, perchè non si può ammettere col Braun che sia nulla la differenza di potenziale fra le soluzioni di due sali di uno stesso metallo.

E che la differenza normale del potenziale fra un metallo e una soluzione di un suo sale sia nulla, il Pellat lo ritiene tanto più vero, inquanto che questa legge è una conseguenza immediata dell'altra legge da esso stabilita che la polarizzazione cessa e l'elettrolisi comincia non appena l'elettrolito ha lo stesso potenziale del catodo, e della legge del Lippmann che un catodo metallico non può polarizzarsi nella soluzione di un suo sale, perchè l'elettrolisi comincia per la più piccola forza elettromotrice che tenda a far deporre il metallo sul catodo.

J. O. THOMPSON. *Su'la legge della tensione elastica.* — Partendo dal concetto che la legge della proporzionalità fra l'allungamento e la trazione sia sempre stata ammessa come evidente di per se stessa, e non sia stata mai stata sottoposta a rigorosa critica, l'A. ha intrapreso nel laboratorio del Kohlrausch delle esperienze per riconoscere se tal legge è o no vera: poichè se un filo è soggetto a trazione, le sue molecole cambiano di posto, e non sarebbe da maravigliarsi che in un medesimo corpo il modulo d'elasticità cambiasse di valore colla deformazione che ha subito.

Le esperienze eseguite con fili privi affatto di piegature e assai lunghi (23 m.), in un locale ove la temperatura restava costante, e tenendo conto delle correzioni dovute all'elasticità susseguente, hanno infatti mostrato che: 1° la legge  $x = \alpha P$  che lega l'allungamento  $x$  alla carica  $P$  del filo è soltanto approssimata; 2° che la relazione fra la tensione e l'allungamento è data invece da

$$x = \alpha P + \beta P^2 + \gamma P^3;$$

3° che il modulo d'elasticità del corpo non deformato si calcola con l'equazione

$$\left(\frac{dx}{dP}\right)_{P=0} = \alpha;$$

4° che finalmente i moduli così calcolati posson differire anche del 10 % da quelli trovati nel modo fin qui usato; e che quindi

è necessario calcolar nuovamente tutte le costanti fisiche che dipendono dal modulo di elasticità.

→ F. KOHLRAUSCH. *Sulla solubilità di alcuni vetri nell'acqua fredda.* — La determinazione della quantità di vetro sciolta nell'acqua, è stata fatta per mezzo della misura della conduttività specifica dell'acqua, conduttività che varia notevolmente con le sostanze che l'acqua tiene in soluzione. Non essendo possibile dare un breve cenno delle esperienze eseguite, si riassumono qui soltanto alcuni fra i risultati ottenuti.

L'acqua alla temperatura di 18°, da una superficie di vetro non ancora adoprata scioglie circa  $\frac{1}{6000}$  di milligrammo al giorno nei primi giorni, e poi circa  $\frac{1}{15000}$  mg. al giorno dopo alcuni mesi, per ogni cm<sup>2</sup> di superficie di vetro di Turingia, se per ogni cm<sup>2</sup> di superficie vi è 1 cm<sup>3</sup> di acqua. In 100 giorni si sciolgono circa 0,01 mg. per cm<sup>2</sup>. L'acqua calda (a 80°) in 20 ore scioglie 6 volte tanto; e due terzi del totale se ne scioglie nelle prime 7 ore. Per boccie di vetro peggiore si può sciogliere fino a 100 mg. per litro nelle condizioni anzidette; e scaldando per 20 ore si può sciogliere fino 500 mg. per litro.

La solubilità del vetro si riduce a circa  $\frac{1}{8}$ , se si lascia per 20 ore nell'acqua a 80°; ma ciò non si verifica che in grado molto minore per i vetri cattivi.

La solubilità dei vetri aumenta colla quantità di alcali che contengono; e il potassio sembra influirvi assai più del sodio.

O. KRIGAR-MENZEL e A. RAPS. *Sulle vibrazioni delle corde.* — Gli A. hanno fotografato la curva di oscillazione di una corda vibrante, illuminando fortemente una sottil fenditura dietro cui era tesa la corda, e producendo l'immagine reale della fenditura stessa su un cilindro coperto di carta fotografica, e ruotante di moto uniforme. Molte delle figure ottenute eccitando in diversi punti le corde e variando il punto di cui erano fotografate le escursioni, son riprodotte in una tavola litografica; e gli A. discutono anche le relazioni fra quelle figure e le equazioni che si hanno dalla teoria per le corde vibranti.

O. LEHMANN. *Osservazioni sulle scariche di una grande macchina elettrica ad influenza.* — Le esperienze furon fatte colla macchina a 60 dischi ruotanti costruita da O. Leuner sulle indicazioni di W. Hempel (cfr. *N. Cim.* 19 pag. 175), e riguardano più specialmente il fenomeno delle ombre elettriche, l'azione dell'autoinduzione nelle scariche, e la luminosità dei tubi privi di elettrodi per influenza e per induzione.

Le ombre elettriche sono attribuite dall' A. al fatto che l'aria elettrizzata che parte dalla punta, incontrando il corpo che pro-

jetta l'ombra, si scarica e non è più in grado di produrne scintille sul disco opposto. Egli ha infatti ottenuto l'ombra anche sostituendo al corpo metallico, interposto fra la punta e il disco, un forte soffio d'aria.

A. ELSAS. *Su un nuovo metodo per la determinazione delle costanti dielettriche.* — Il metodo proposto dall'A. è simile a quello usato dal Winkelmann (*N. Cim.* 28, pag. 170); ma su di quello ha il vantaggio che sono adoprati due condensatori affatto distinti, che posson rendersi di capacità uguale. Uno è invariabile, e può essere anche una bottiglia di Leyda; l'altro è del tipo Kohlrausch, a piatto mobile. L'A. ha adoprato il suo induttore differenziale (*N. Cim.* 31, pag. 83) e il telefono, ed ha determinato oltre che il potere induttore specifico del vetro e della mica, anche quello della nuova sostanza isolante messa in commercio col nome di "celluvert", e per questa ha trovato un valore compreso fra 1,44 e 2,66 a seconda delle varietà dure o flessibili, cioè molto più piccolo di tutti quelli dei coibenti solidi fin qui studiati.

Detto. *Sulla misura delle resistenze col telefono.* — Nella descrizione che fece il Wien del telefono quale apparecchio ottico (*N. Cim.* 30 pag. 184) è detto che esso si presta meglio di quello solito per la determinazione delle resistenze, perchè non reagisce che per una determinata vibrazione sinusoidale, mentre l'altro reagisce per tutte le vibrazioni, e specialmente per i suoni più acuti che accompagnano la nota fondamentale.

L'A. indica in questa Nota come si possano eliminare quelle note anche col telefono ordinario, riducendo più che è possibile le scintille dell'interruttore, e adoprando per questo, anzichè la solita molla, una lamina a forma di triangolo equilatero. Egli accenna anche alle disposizioni sperimentali che più si prestano per ottenere anche col telefono comune dei risultati esatti.

M. WIEN. *Misura delle costanti d'induzione col telefono ottico.* — In questa Nota l'A. indica le disposizioni dei circuiti per ottenere col suo apparecchio il rapporto fra due capacità, fra un coefficiente d'autoinduzione e una capacità, fra un coefficiente d'induzione mutua e uno d'autoinduzione etc.

A. FRANKE. *L'elettrometro a quadranti quale apparecchio di misura per le onde elettriche nei fili.* — L'A. riferisce di alcune esperienze fatte per mostrare come si possa usare anche l'elettrometro a quadranti nello studio delle onde elettriche che si propagano nei fili; e dalle misure eseguite ottiene una rappresentazione grafica delle onde che si propagano in due fili paralleli. Non è peraltro fatta alcuna menzione dei lavori del Bjerknæs, che si servi appunto dell'elettrometro in studi consimili.

J. ELSTER e H. GEITEL. *Sulla dispersione elettrica provocata dalla luce solare nei minerali.* — Guidati dal fatto che fra i corpi non metallici, soltanto il color luminoso di Balmain presenta la dispersione fotoelettrica, gli A. pensarono di studiare se quella proprietà non fosse dovuta alla fosforescenza che quella sostanza presenta; e dopo aver modificato il loro apparecchio per poter adoprare cariche elettriche più forti, essi riconobbero infatti che tutti i minerali fosforescenti disperdono l'elettricità se sono illuminati. Lo spato fluore è quello che più di tutti si presta; ma anche la criolite, lo spato pesante, la celestina, l'arragonite, la stronzianite, lo spato calcareo, il feldspato, il granito mostrano tracce evidenti di azione fotoelettrica.

La dispersione è maggiore se la superficie del minerale è recente, e i raggi più efficaci sono gli azzurri e gli ultravioletti. Se si bagna con acqua, il minerale disperde forse meglio; perde invece questa proprietà col riscaldamento, ma in questo caso cessa anche di esser fosforescente.

Questi risultati conducono gli A. a concludere che le parti minerali della superficie terrestre, che son certamente caricate di elettricità negativa, disperdono elettricità nell'atmosfera più assai sotto l'azione della luce solare che all'oscuro. Si ha dunque una prova diretta della teoria proposta da Bezold e Arrhenius, secondo i quali il sole esercita sulla terra non già un'azione elettrostatica o dinamica a distanza (che anche teoricamente sarebbe difficile a intendersi); ma bensì esercita delle forze elettriche per mezzo dei suoi raggi luminosi.

W. NEGBAUR. *Ricerche sperimentali sulla differenza di potenziale alle superficie di contatto tra due soluzioni molto diluite.* — Scopo dell'A. è stato di sottoporre a una verifica sperimentale la teoria del Planck (*Wied. Ann.* 39 e 40, 1890) sulle pile a concentrazione. Il metodo usato per la misura delle differenze di potenziale, è un metodo di compensazione col galvanometro e con una batteria di accumulatori. I risultati ottenuti confermano la teoria del Planck, e l'A. dà in diverse tabelle le f. e. m. di molte combinazioni di soluzioni diversamente concentrate.

Detto. *Sull'influenza dell'elasticità susseguente e della deformazione permanente sulle misure eseguite per mezzo dell'elasticità di torsione.* — Dopo riportati i risultati di molte osservazioni fatte sulla torsione dei fili metallici, l'A. consiglia di seguire l'andamento seguente nelle misure di precisione: Il filo di argentana, o di nichel, che si vuole usare, sia più sottile che è possibile, e si sospenda per alcuni giorni prima di servirsene, con un peso almeno doppio di quello che si userà poi nelle mi-



sure. Prima di cominciare le esperienze si torda il filo 2 o 3 volte nei due sensi di un angolo assai grande: così si eliminano le piccole perturbazioni che dipendono dalla eventuale disposizione irregolare delle molecole, o da una sospensione inizialmente dissimetrica etc. È necessario che l'ultima torsione sia nel senso di quella che poi sarà usata nelle misure. Se il filo resta inoperoso a lungo, è utile lasciarlo carico con poco peso, e di mantenerlo nella posizione in cui servirà nelle misure cui sarà poi destinato.

Detto. *Forma pratica della pila campione* Latimer-Clark. — Per fare a meno del vaso poroso, l'A. prende un tubo ad H, un lato del quale è prolungato in basso e poi piegato ad U. Nel gomito di questo prolungamento è situato il mercurio, nel quale poi, sul lato aperto del tubo a U pesca il filo di platino che serve da polo positivo. Sulla superficie del mercurio che trovasi nel tubo a H è situata la pasta di solfato di mercurio, e al di sopra di questa, a riempire tutto il resto del vaso, sta la soluzione, nella quale pesca lo zinco. Sopra la soluzione si fonde della vaselina. — Il vantaggio di questa disposizione consiste nell'impedire allo zinco di venir a contatto colla pasta di solfato mercurico.

Detto. *Pila campione per piccole differenze di potenziale*. — Le pile proposte a questo scopo dall'A. sono pile a concentrazione. La forma che consiglia è di due tubi a H uniti per mezzo di un tubo a robinetto: nel foro del robinetto si pone poi della carta pergamena che impedisca il miscuglio delle due soluzioni contenute nei tubi laterali. Le soluzioni che meglio si prestano sono quelle dei cloruri di sodio e di litio, e meglio ancora quelle di acido cloridrico. L'A. si propone di pubblicare una tabella, in cui sian contenute le densità di tali soluzioni da adoprarsi per avere forze elettromotrici di 0,1, 0,2 .... 1,0 V. e i coefficienti di temperatura ad esse relativi.

J. BRAUN. *Su un elettrometro assoluto da lezione*. — All'astice, che porta la solita sfera metallica degli elettroscopi, è unita una lamina verticale di rame piegata nel mezzo a doppia squadra, ove è praticata una fenditura che serve a portare l'asse di rotazione di un leggerissimo ago di alluminio, provvisto di alette alle due estremità. Quest'ago, che nella parte superiore resta a destra e nell'inferiore alla sinistra della lamina di rame, per un piccolissimo eccesso di peso nella parte inferiore, quand'è nella posizione di riposo sta parallelo e vicinissimo alla lamina di rame; e ben si comprende come venga deviato dalla verticale, quando il bottone dell'elettroscopio si carica di elettricità. Le deviazioni si leggono direttamente su di una scala posta nell'interno della cassa, che è quasi totalmente metallica. Variando l'eccesso di

peso nella parte inferiore dell'ago, si può avere maggiore o minore sensibilità; e con una batteria di pile campione e un elettrometro a quadranti si può comodamente graduare quest'elettroscopio con assai precisione in volta.

G. QUINCKE. *Sulle relazioni fra gl'indici di refrazione e la compressibilità dei liquidi.* — Prendendo occasione da quanto è stato detto dal Röntgen, che cioè i risultati ottenuti dal Quincke nel 1883 presentano errori non indifferenti (cfr. *N. Cim.* 32), l'A. mostra in una tabella come i valori trovati dal Röntgen per la compressibilità dei liquidi differiscano non solo da quelli dell'A. stesso, ma anche da quelli di altri sperimentatori, specialmente per l'etere e pel benzolo. Quantunque riconosca che con mezzi migliori di quelli di cui disponeva si possano avere risultati più precisi, l'A. ritiene perciò che anche quelli che già indicò meritino fiducia, e che accennino di fatto alla validità della relazione  $(n - 1) | d = \text{costante}$ .

Sarebbero necessarie nuove ricerche per decidere se la diversità dei risultati trovati dal Röntgen, in confronto di quelli di altri sperimentatori, è dovuta alla diversa velocità della compressione o ad altre cause.

G. LEONHARDT. *Su un modo facile di determinare i poli di una macchina a influenza.* — So davanti al disco girevole della macchina, e in corrispondenza delle finestre del disco fisso, si avvicina un dito, si sente o uno scoppiettio o un sibilo, a seconda del segno del polo che è dalla parte cui si avvicina il dito. Il polo negativo della macchina è dalla parte ove si ode lo scoppiettio.



SULLA DISTRIBUZIONE DEI POTENZIALI PRESSO IL CATODO;  
NOTA PREVENTIVA DEL PROF. AUGUSTO RIGHI.

Un mio precedente lavoro <sup>1)</sup> contiene la descrizione del seguente fenomeno. In un palloncino di vetro contenente aria rarefatta trovasi un elettrodo comunicante col polo — d'una pila il cui polo + è a terra, mentre è a terra pure la parete interna argentata del palloncino. Un secondo elettrodo, che è mobile, comunica con un elettrometro a quadranti. La deviazione che si ottiene, dopo un intervallo costante di tempo, cresce fino ad un massimo allorchè si ripete la misura aumentando di volta in

1) *Rend.* vol. VI (1890) pag. 83.

volta gradatamente la distanza fra i due elettrodi, e poi diminuisce di nuovo.

Considerando che fra l'elettrodo negativo e la parete del pallone deve propagarsi in un modo continuato l'elettricità, e che l'elettrodo mobile altro non è che una sonda, che assume in tempi eguali potenziali sensibilmente proporzionali a quelli dei vari punti dell'aria rarefatta ove la sonda stessa si trova, ho istituito nuove esperienze sostituendo un galvanometro all'elettrometro. La deviazione galvanometrica è in tal caso dovuta alla corrente derivata, essendo la sonda e l'anodo (parete argentata) i punti d'attacco della derivazione. Ammessa la proporzionalità fra le deviazioni osservate e la differenza fra il potenziale del punto ove trovasi la sonda ed il potenziale dell'anodo, ho potuto stabilire i fatti seguenti.

Allontanandosi dal catodo si trovano potenziali di più in più bassi, sino ad una certa distanza, oltre la quale crescono nuovamente. *Esiste dunque intorno al catodo una superficie ideale, nei vari punti della quale il potenziale ha il minimo valore (cioè anche più negativo che in punti immediatamente vicini al catodo).* La chiamo per brevità *superficie negativa* <sup>1)</sup> La sua distanza dal catodo cresce colla rarefazione, e qualche poco anche al diminuire della f. e. della pila, e al diminuire del raggio di curvatura del catodo.

Alle due parti di essa la discesa di potenziale non è egualmente rapida, ma lo è assai più fra il catodo e la *superficie negativa*, che non fra questa e l'anodo. Essa è poi più rapida alle pressioni relativamente più forti dell'aria, come pure quando s'impiegano f. e. appena sufficienti affinchè la trasmissione dell'elettricità nell'aria rarefatta possa aver luogo.

Per esempio, con pressione dell'aria di 5 mm. e con una pila di f. e. appena bastante perchè passi l'elettricità fra il catodo e la parete argentata del pallone, il galvanometro non devia finchè la sonda è a distanza dal catodo minore di circa 1 mm. Alla distanza di circa 1 mm. si osserva una forte deviazione, mentre aumentando ancora di pochissimo la distanza suddetta il galvanometro torna quasi a zero. Si ha insomma lo

1) Nel mio nuovo apparecchio catodo ed anodo sono sensibilmente sfere concentriche. Per simmetria anche la *sup. neg.* avrà tal forma.

stesso effetto come se la *superficie negativa* fosse un involucro metallico comunicante col polo negativo della pila, e toccato ad un tratto dalla sonda quando la sua estremità giunge ad 1 mm. dal catodo.

Con pressioni minori o con maggiori f. e. le deviazioni crescono più o meno lentamente allorchè la sonda si scosta, da una parte o dall'altra, dalla *superficie negativa*.

Se mentre uno dei reofori del galvanometro comunica ancora colla sonda, si pone l'altro in comunicazione col catodo, anzichè colla parete del recipiente, la quale fa da anodo, le deviazioni sono naturalmente invertite, ma non si riconosce più l'esistenza della *superficie negativa*. Infatti in tal caso le deviazioni crescono gradatamente spostando la sonda dal catodo verso l'anodo.

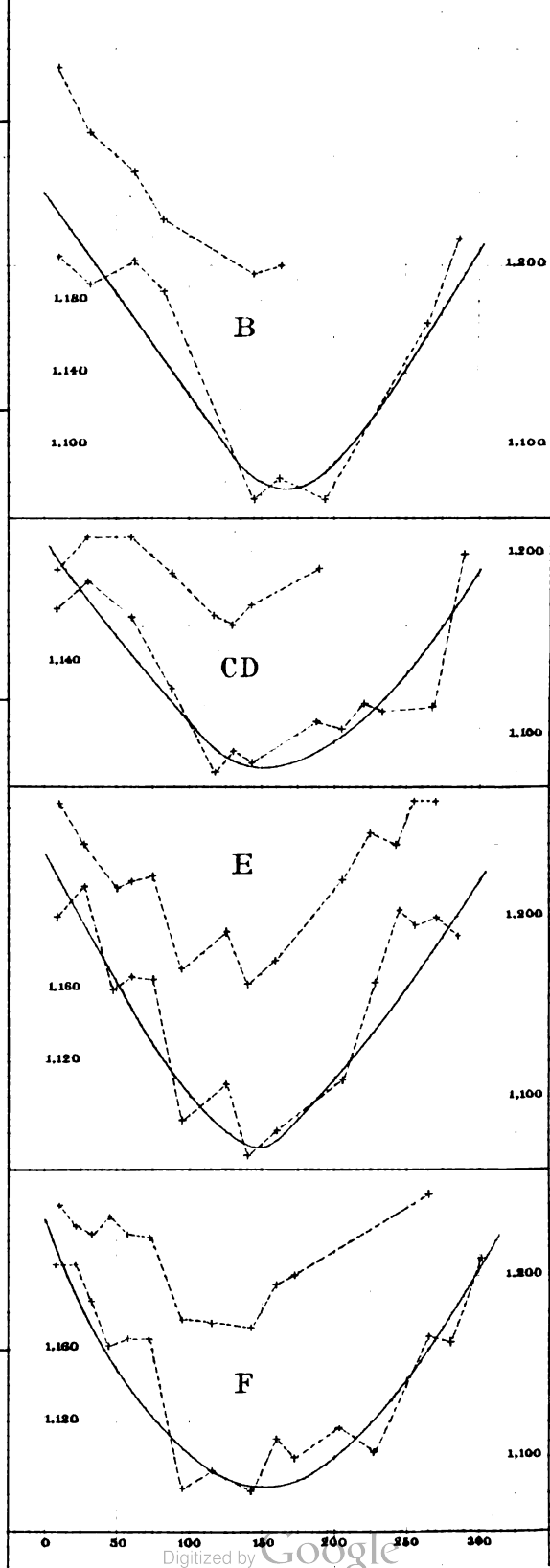
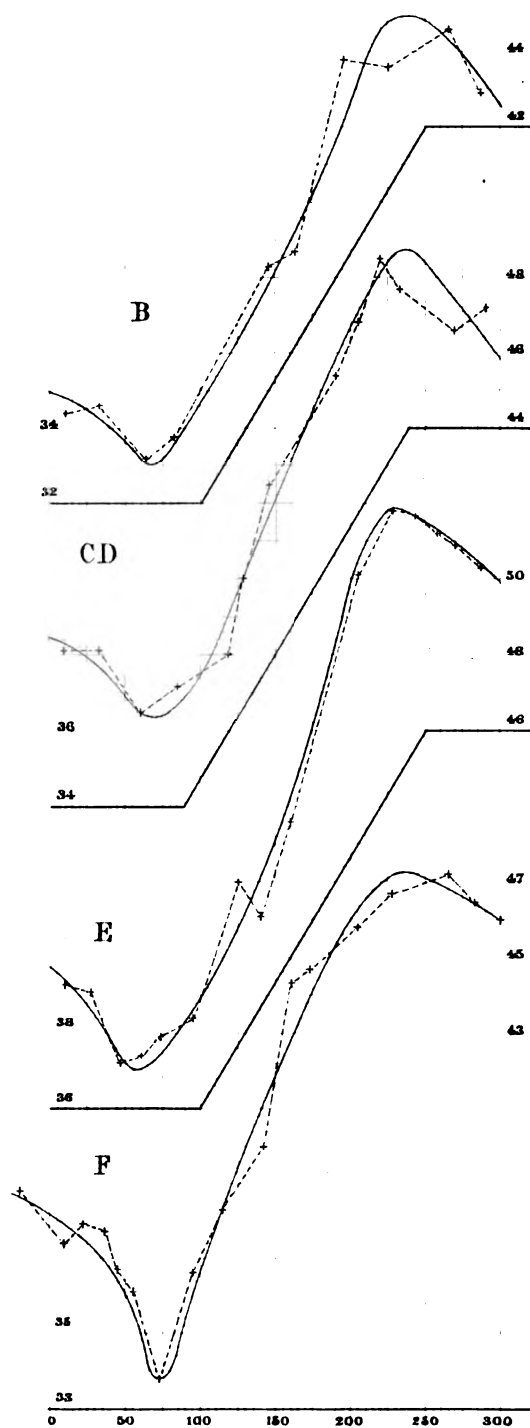
Mi sembra che la ragione della differenza di risultati che si ottengono nei due casi debba dipendere da ciò che la sonda nel primo caso fa da anodo, relativamente alla corrente derivata, e nel secondo fa invece da catodo. Se intorno ad essa in quest'ultimo caso si forma una distribuzione di potenziali simile a quella definita più sopra, potrà esservi una specie di compensazione che nasconderà l'esistenza della *superficie negativa*. Con ciò si spiegherebbe ancora come essa abbia potuto sfuggire agli altri sperimentatori.

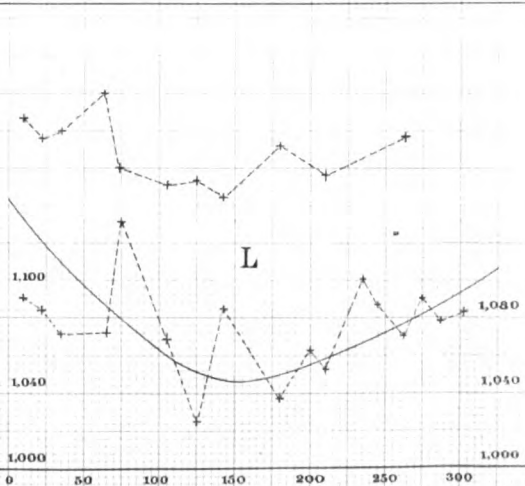
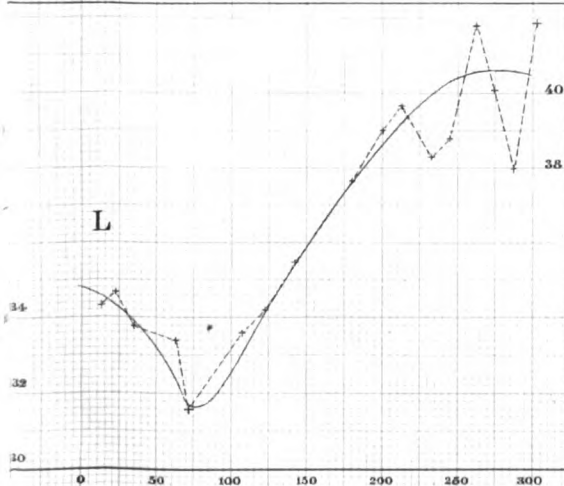
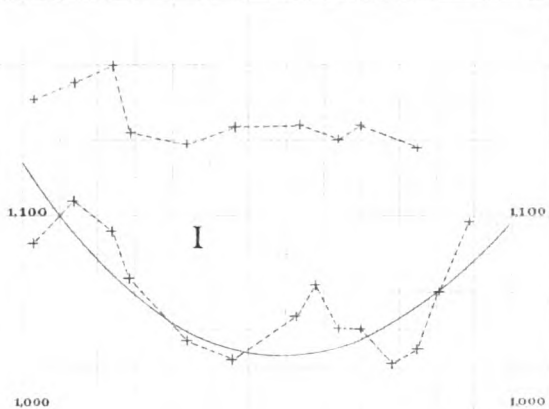
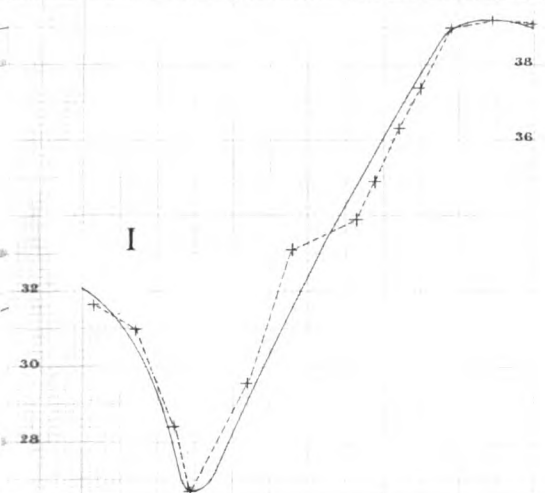
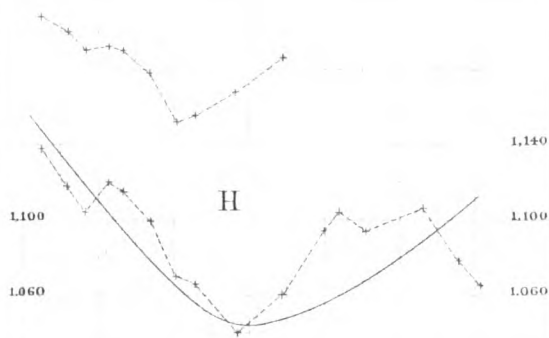
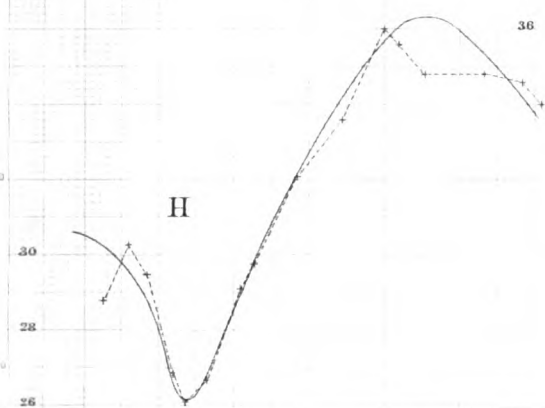
Esperienze dimostrative fatte coll'elettroscopio, mi hanno dato risultati affatto paralleli a quelli esposti. Se, infatti, la sonda comunica colla foglia d'oro d'un elettroscopio a pile secche, e se l'anodo (parete del pallone) comunica col suolo, la deviazione (negativa) della foglia d'oro cresce fino ad un massimo, allorchè la sonda viene allontanata dal catodo. Se invece è questo che comunica col suolo, la deviazione (positiva) cresce gradatamente. Stante il non mai assoluto isolamento, la spiegazione precedente si applica anche alle esperienze fatte coll'elettroscopio.

Nella Memoria completa che pubblicherò tra qualche tempo, darò i particolari delle esperienze, e farò un confronto fra i miei risultati e quelli anteriori di Warren de la Rue e Müller, di Schuster e di Crookes.















Serie E

Fig.1.

E

Fig.3.

50 100

163

131

98

76°

56.7

37°2

176

131

139

117

114

97

73

54

+13

+12

+8

+8

+7

-20

-20

-21°

-21°

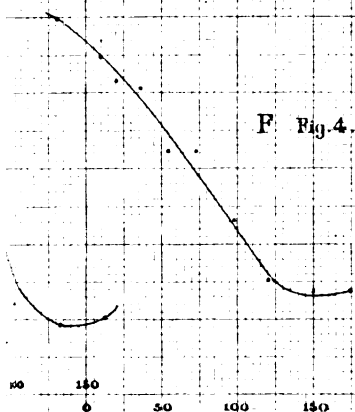
Fig.11

Serie F

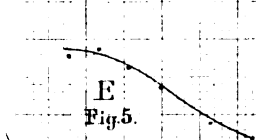
Fig.2.

0

F Fig. 4.



E Fig. 5.



F Fig. 6.

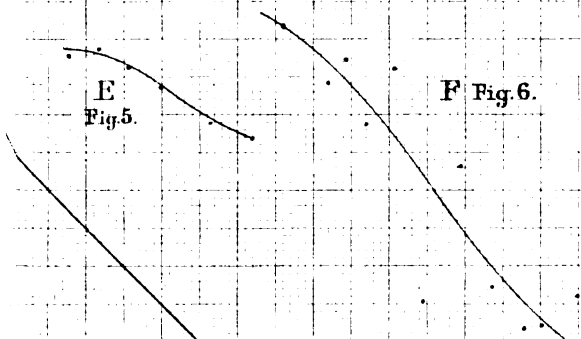


Fig. 7.

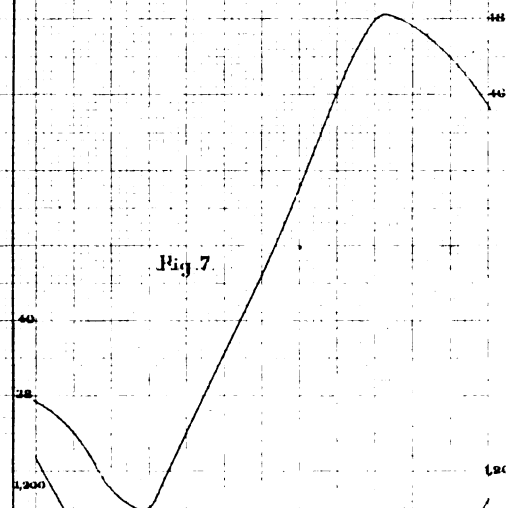


Fig. 8.

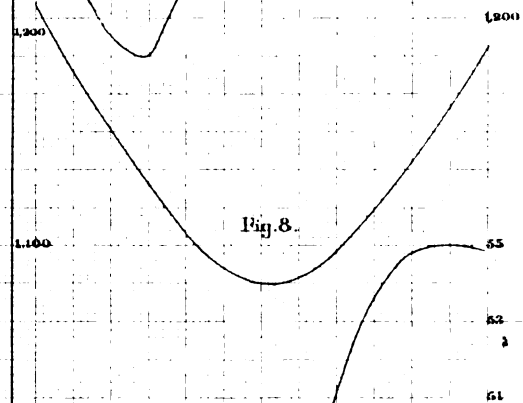


Fig. 9.

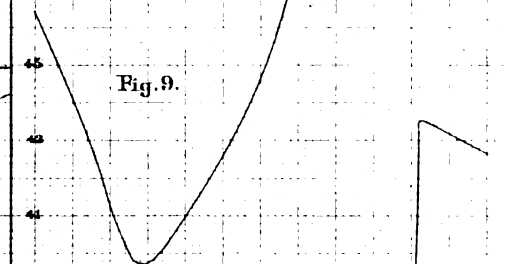
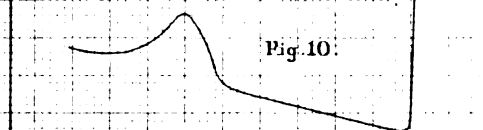


Fig. 10.



1914



Fig. 2

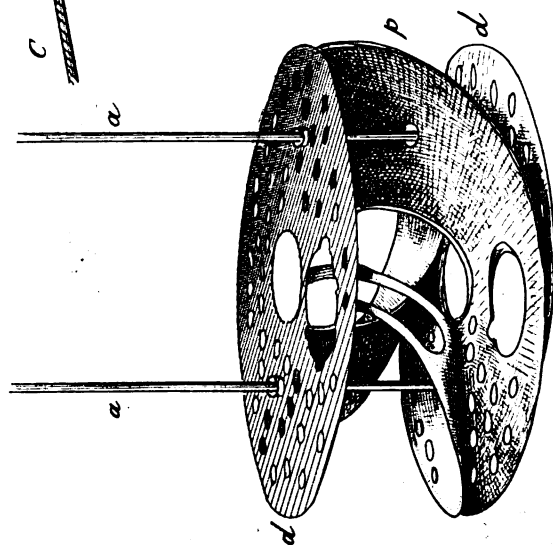
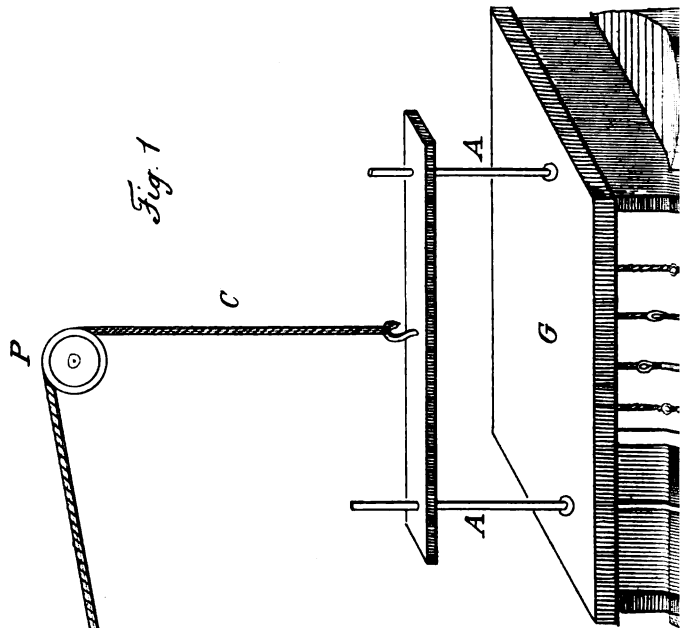
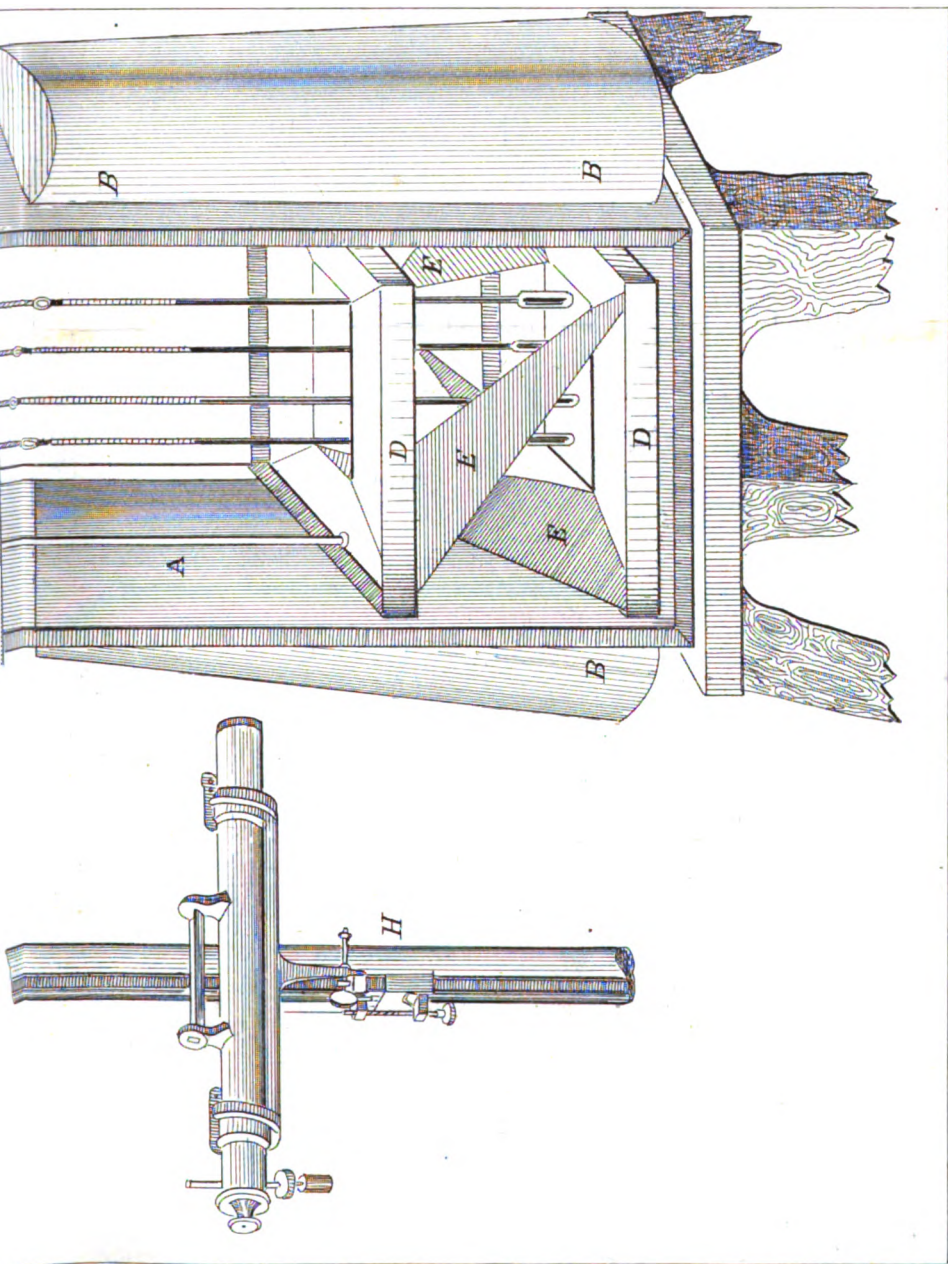


Fig. 1







*Lit. Nuova, Catania*







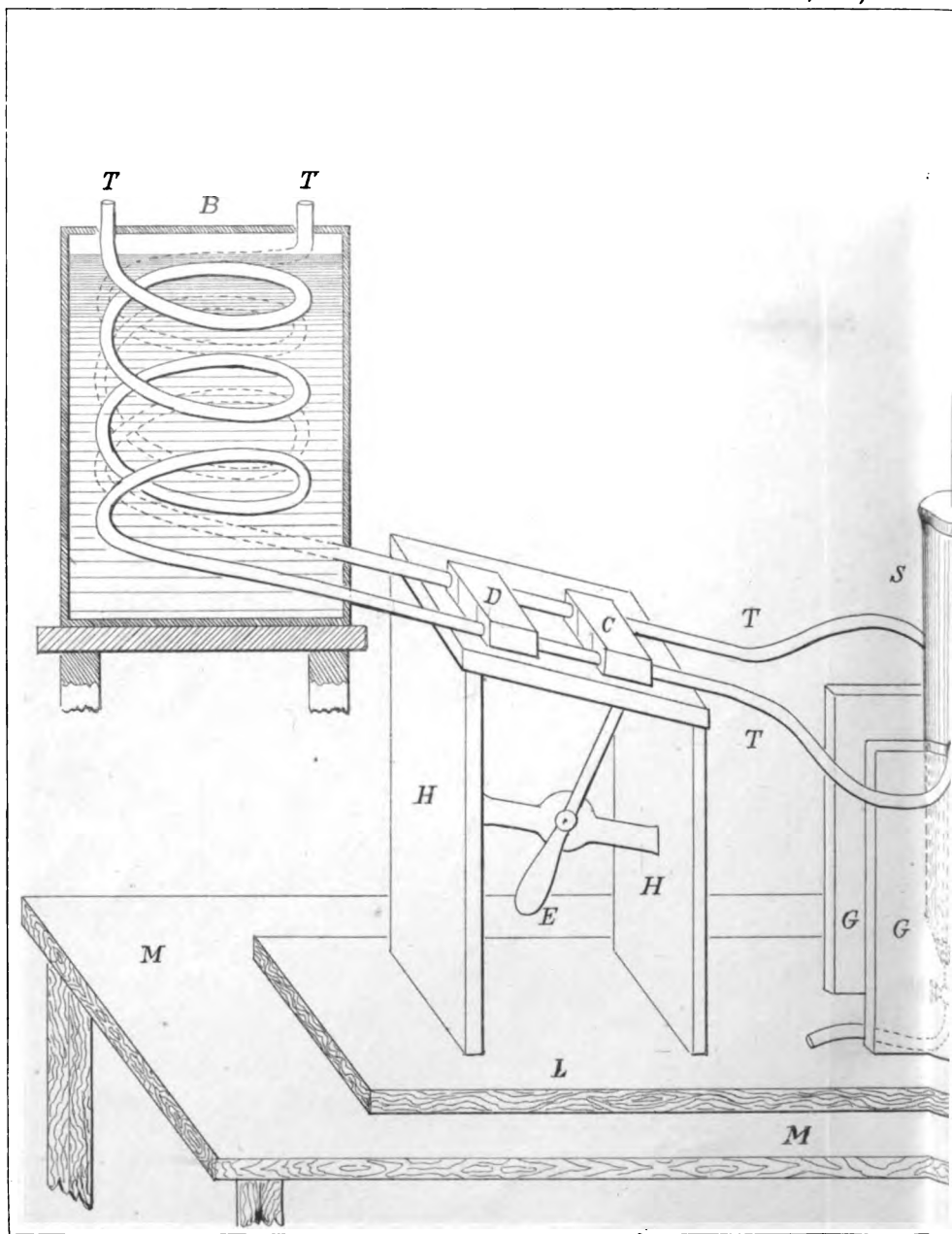








Fig. 1.

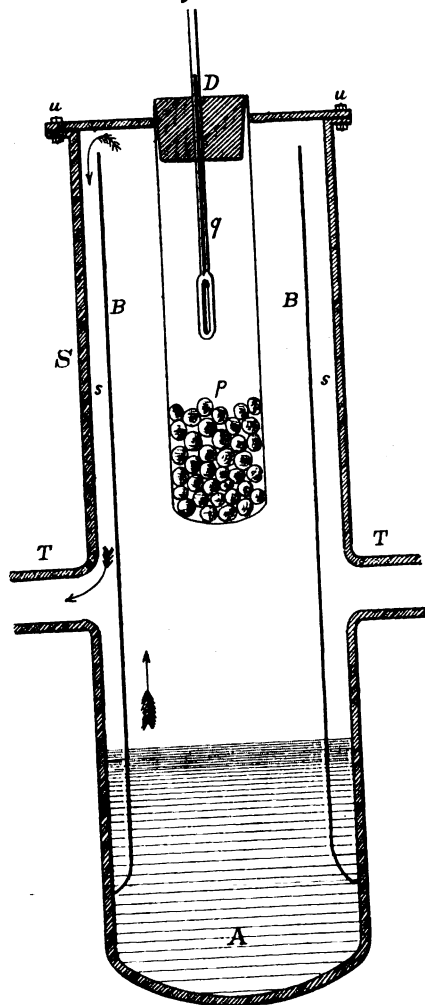
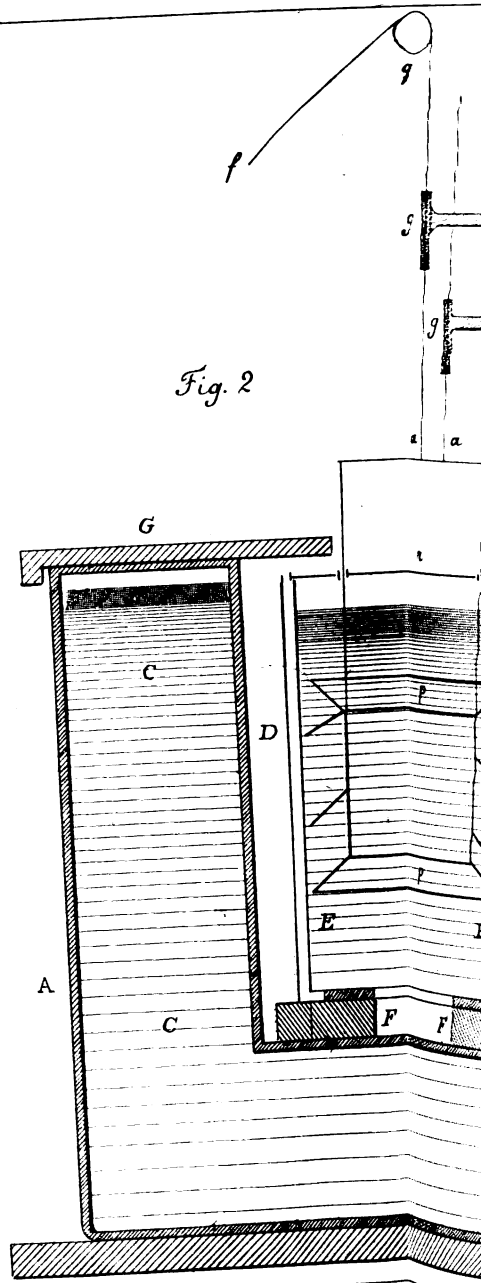
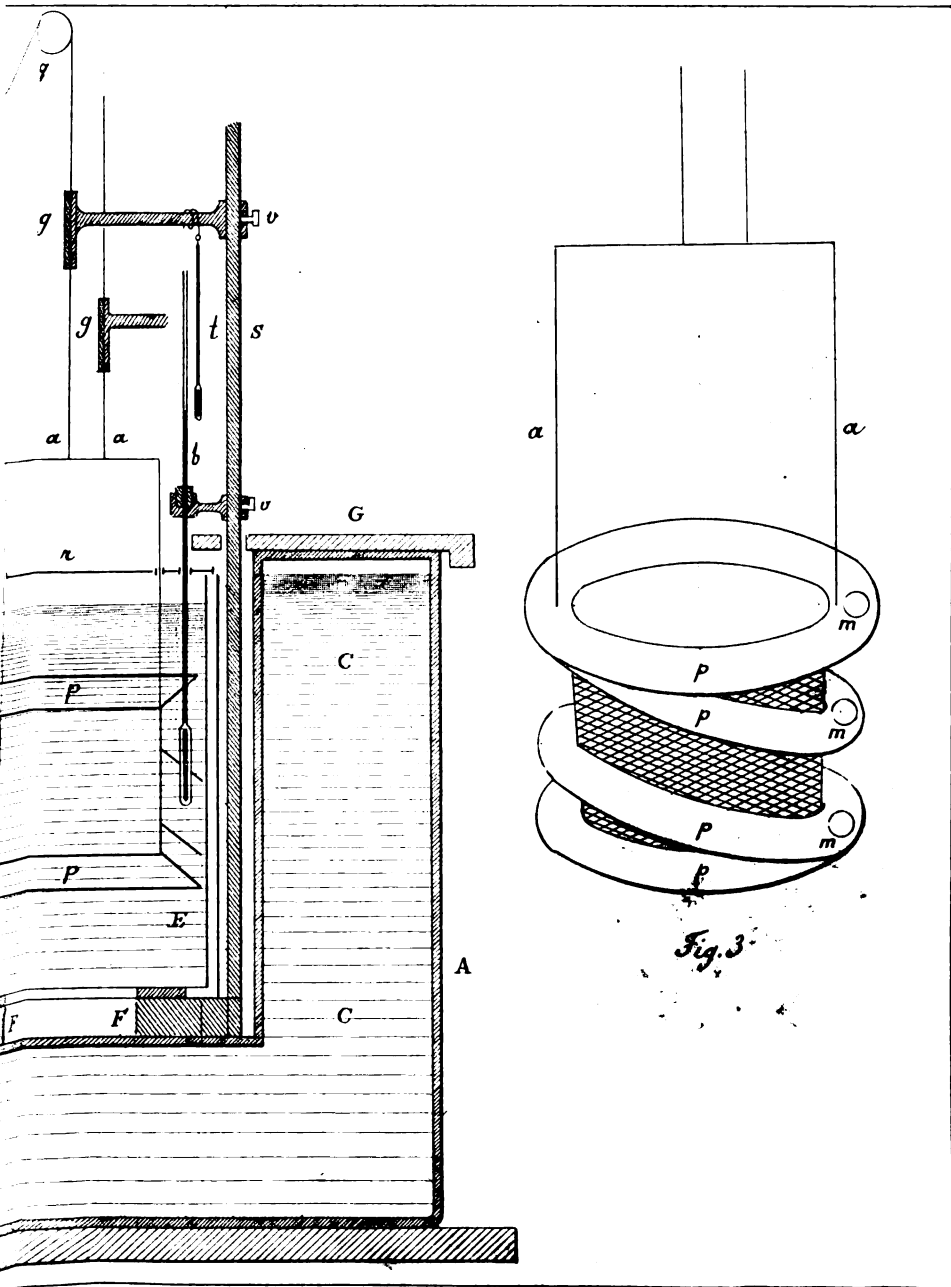


Fig. 2





Digitized by Google



Th. Lohnstein. Osservazioni ad una esperienza del sig. von Bezold sulla polarizzazione dielettrica . . . . .	pag. 76
W. Marek. Dilatazione dell'acqua . . . . .	ivi
G. Adler. Su una conseguenza della teoria Poisson-Mossotti . . . . .	77
A. Winkelmann. Sulla conduttività termica dei gas. . . . .	78
L. Arons e H. Rubens. Velocità di propagazione delle onde elettriche in alcuni coibenti solidi . . . . .	ivi
J. Vanni. Sull'apparente variabilità dell'equivalente elettrochimico del rame . . . . .	79
W. Shrader. Sulla resistenza alla diffusione per le correnti elettriche, che si propagano dalla base di un cilindro in uno spazio più esteso . . . . .	ivi
E. Pfeiffer. Azione dell'acqua sul vetro, e su un metodo elettrico per studiarla . . . . .	80
J. Ferche. Su alcune proprietà fisiche del benzolo . . . . .	ivi
P. Lebedew. Su delle misure della capacità specifica induttiva dei vapori, e sulla teoria Mossotti-Clausius dei dielettrici. . . . .	81
E. Lommel. Sulla direzione delle vibrazioni nella luce polarizzata . . . . .	ivi
C. Bohr e J. Bock. Determinazione dell'assorbimento di alcuni gas nell'acqua per temperature fra 0 e 100° . . . . .	82
V. Dvorak. Sulla teoria dell'interruttore automatico della corrente . . . . .	ivi
M. Planck. Sul principio dell'aumento dell'entropia . . . . .	83
G. Markovski. Sulla f. e. m. delle pile a gas . . . . .	ivi
F. Braun. Sull'elettrostenolisi . . . . .	ivi
F. Braun. Sulle relazioni elettrocapillari . . . . .	84
V. Bjerknes. Sul movimento dell'elettricità nell'eccitatore di Hertz . . . . .	ivi
K. Waitz. Sulla misura della velocità di propagazione delle onde elettriche nei diversi dielettrici . . . . .	87
A. Heydweiller. Elettrodinamometro assoluto per correnti molto intense. . . . .	ivi
H. Pellat. Risposta alla critica del sig. F. Braun sulla uguaglianza del potenziale al passaggio da un metallo a una soluzione di un suo sale . . . . .	89
J. O. Thompson. Sulla legge della tensione elastica. . . . .	ivi
F. Kohlrausch. Sulla solubilità di alcuni vetri nell'acqua fredda . . . . .	90
O. Krigar-Menzel e A. Raps. Sulle vibrazioni delle corde . . . . .	ivi
O. Lehmann. Osservazioni sulle scariche di una grande macchina elettrica ad influenza . . . . .	ivi
A. Elsas. Su un nuovo metodo per la determinazione delle costanti dielettriche . . . . .	91
Detto. Sulla misura delle resistenze col telefono . . . . .	ivi
M. Wien. Misura delle costanti d'induzione col telefono ottico . . . . .	ivi
A. Franke. L'elettrometro a quadranti quale apparecchio di misura per le onde elettriche nei fili . . . . .	ivi
J. Elster e H. Geitel. Sulla dispersione elettrica provocata dalla luce solare nei minerali . . . . .	92
W. Negbaur. Ricerche sperimentali sulla differenza di potenziale alle superficie di contatto tra due soluzioni molto diluite . . . . .	ivi
Detto. Sull'influenza dell'elasticità susseguente e della deformazione permanente sulle misure eseguite per mezzo dell'elasticità di torsione. . . . .	ivi
Detto. Forma pratica della pila campione Latimer-Clark . . . . .	93
Detto. Pila campione per piccole differenze di potenziale . . . . .	ivi
J. Braun. Su un elettrometro assoluto da lezione . . . . .	ivi
G. Quincke. Sulle relazioni fra gl'indici di refrazione e la compressibilità dei liquidi . . . . .	94
G. Leonhardt. Su un modo facile di determinare i poli di una macchina a influenza . . . . .	ivi





## PATTI D'ASSOCIAZIONE

---

Del Nuovo CIMENTO si pubblica ogni mese un fascicolo di tre fogli di stampa.

Le associazioni sono obbligatorie per un anno, e gli Associati, che per la fine di Dicembre non avranno disdetta l'associazione, s'intendono obbligati per l'anno successivo.

Il prezzo d'associazione per l'intero anno è fissato come segue:

Per il Regno Italiano, franco al destino it. L. 10. 50

Per l'Estero, come sopra . . . . . » 12. —

Le lettere relative a dimande di associazioni, a pagamenti ed a tutto ciò che riguarda l'amministrazione del Giornale, devono essere dirette, franche di Posta, a Pisa, al gerente *P. Salvioni. — Tipografia Pieraccini.*

---

Ciò che riguarda la direzione scientifica del Giornale potrà esser diretto a Pisa al Prof. *R. Felici.*

---



72  
(Conto corrente con la Posta)

pubblica una volta al mese.

1892. Fascicolo 9. e 10.

# IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATA PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

da R. FELICI e V. VOLTERRA

**Terza serie Tomo XXXII.**

SETTEMBRE e OTTOBRE

Publicato il 30 Dicembre 1892.

1892

**PISA**

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

# INDICE

Sulla variabilità del calore specifico dell'acqua fra 0° e + 32° — Memoria dei Prof. A. Bartoli ed E. Stracciati ( <i>continuazione</i> )	pag. 97
Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo — Memoria del Professore Eugenio Beltrami ( <i>continuazione e fine</i> )	„ 113
Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa (per dati spostamenti de' punti della superficie) — Nota del Prof. Valentino Cerruti	„ 121
Sulla tenacità e sulla plasticità del ferro a diverse temperature — Memoria di M. Ascoli ( <i>continuazione e fine</i> )	„ 134
Sulla variazione di resistenza del ferro e del nichel nel campo magnetico — Nota del Dott. M. Cantone	„ 155

## RIVISTA

SUNTI di A. BARTORELLI. — *Comptes Rendus*, (1. semestre 1892).

H. Le Chatelier. Sulla misura delle alte temperature	„ 165
Gouy. Osservazioni sulla tensione superficiale dei metalli liquidi in occasione di una Nota di Pellat	„ 166
D. Negreano. Variazione della costante dielettrica dei liquidi con la temperatura	„ ivi
R. Blondlot e M. Dufour. Sull'influenza esercitata sui fenomeni di risonanza elet- tromagnetica dalla dissimetria del circuito lungo il quale si propagano le onde	„ 167
R. Colton. Metodo telefonico per lo studio della propagaz. delle onde elettriche	„ ivi
H. Pellat. Osservazioni sull'ultima Comunicazione di Gouy, sulla tensione superfi- ciale dei metalli liquidi	„ ivi
A. Berget. Sui fenomeni elettrocapillari	„ 168
E. Bouty. Sulla coesistenza del potere dielettrico e della conducibilità elettrolitica	„ 169
C. Soret. Sulla conducibilità termica nei corpi cristallizzati	„ ivi
E. Colot. Sulle tensioni dei vapori saturi dei differenti liquidi alla stessa pressione	„ 170
H. Abraham. Sopra un condensatore campione	„ ivi
Gouy. Sui fenomeni elettrocapillari	„ ivi
E. Carvalho. Assorbimento cristallino e scelta fra le diverse teorie della luce	„ ivi
J. Violle. Sull'irraggiamento dei corpi incandescenti e sulla misura ottica delle alte temperature	„ 172
H. Le Chatelier. Sulla temperatura del Sole	„ ivi
L. De La Rive. Applicazione della teoria delle linee di forza alla dimostrazione di un teorema d'elettrostatica.	„ 173
A. Berget. Sui fenomeni elettro-capillari	„ 174
Lecoq De Boisbaudran. Sugli spettri elettrici del Gallio	„ ivi
Paul Bary. Sugli indici di rifrazione delle soluzioni saline	„ ivi
Edouard Branly. Nuova conducibilità unipolare dei gas	„ 175
Julien Lefèvre. Sull'attrazione di due lamine separate da un dielettrico.	„ ivi

SULLA VARIABILITÀ DEL CALORE SPECIFICO DELL'ACQUA FRA  $0^{\circ}$  E  $+32^{\circ}$ ;  
MEMORIA DEI PROFF. A. BARTOLI ED E. STRACCIATI. <sup>1)</sup>).

Diciamo ora del metodo tenuto nel calcolare le esperienze.

Per determinare gli equivalenti in acqua dei calorimetri e degli agitatori cominciammo dal determinare il calorico specifico della lastra e del filo metallico con cui furono costruiti. Facemmo questa determinazione fra le temperature di circa  $+3^{\circ}$  e  $+35^{\circ}$  adoperando una stufa ad etere più piccola ma simile a quella adoperata nelle esperienze con le palline: i valori da noi trovati furono: per l'ottone adoperato 0,09275, per il nichel adoperato 0,10493 (media di dieci determinazioni concordanti) <sup>2)</sup>).

Gli equivalenti in acqua dei termometri si potevano determinare con tutta esattezza, fino a un punto qualunque dell'asta, avendoci il costruttore indicato il peso del mercurio, il peso della bacchetta e del serbatoio, ed avendoci inoltre mandato, dietro nostra richiesta, un campione dello stesso vetro col quale erano fabbricati i termometri, del quale noi determinammo il calorico specifico fra  $10^{\circ}$  e  $35^{\circ}$  e trovammo il valore 0,1938 (Pel vetro dei termometri Baudin) <sup>3)</sup>).

Il peso dell'acqua ed il peso delle palline fu ridotto al vuoto. Le palline conservarono in generale lo stesso peso e si verificava di quando in quando che non avesse variato; soltanto le palline di piombo perdevano sensibilmente di peso e si dovevano ripesare ogni giorno distribuendo la diminuzione di peso fra le due esperienze fatte nella giornata: la diminuzione era di circa 0<sup>gram</sup>.030 in ciascuna esperienza sopra un peso di piombo di 1600 grammi (circa) ossia di  $\frac{1}{54000}$  del peso totale.

In tutte le esperienze abbiamo cercato che la temperatura iniziale dell'acqua del calorimetro fosse uguale a quella dell'ambiente e dell'acqua del recinto che circondava il calorimetro: la cosa era un po' incomoda per le temperature prossime a zero e per quelle superiori a  $30^{\circ}$ , ma era facile per le altre. Per le esperienze a temperature prossime a  $0^{\circ}$  si scelsero le giornate

1) *Continuazione.* Vedi pag. 19.

2) Avendo preso come unità il calore specifico vero dell'acqua a  $+15^{\circ}$ .

3) Pel mercurio dei termometri si accettò il numero 0,0333.

più fredde dell'inverno (a Firenze) quando la temperatura esterna discendeva sotto zero e lasciando aperte nella notte le finestre della sala si poteva, nelle prime ore della mattina, avere la stanza a  $+1^{\circ}$  e anche più fredda: le esperienze alle alte temperature si fecero nei giorni più caldi del luglio e dell'agosto, nei quali, occorrendo, si accendeva talora anche un buon calorifero.

Così in generale non si ebbe da tener conto di variazioni di temperatura del calorimetro prima del mescolgio: quando però questa variava un poco, allora si notavano di minuto in minuto le temperature, nei 10 minuti che precedevano l'istante del mescolgio.

La correzione pel raffreddamento del calorimetro durante la esperienza fu fatta così:  $1^{\circ}$  quando la temperatura rimaneva assolutamente costante prima di gettare le palline, si ammise che dall'istante del mescolgio fino a che si raggiungeva l'equilibrio di temperatura fra le palline e il liquido (ciò che succedeva dopo un minuto) il calorimetro si raffreddasse  $\frac{1}{3}$  di quel che si raffreddava in un uguale intervallo di tempo successivo; e questo raffreddamento si deduceva osservando le temperature del calorimetro per altri 9 minuti dopo raggiunta la temperatura finale.

$2^{\circ}$  Quando la temperatura del calorimetro variava un poco avanti il mescolgio,  $1^{\circ}$  si è ammesso che durante l'esperienza la perdita di calore del calorimetro sia stata, nel primo terzo dell'intervallo di tempo, uguale a quella che era prima del mescolgio e per gli altri due terzi uguale a quella che era dopo raggiunta la temperatura finale.

Questa correzione fu sempre molto piccola: non superò quasi mai i sei o sette millesimi di grado e spessissimo oscillò fra 2 e 4 millesimi  $^{\circ}$ ).

1) Quando la temperatura del calorimetro variava un poco avanti il mescolgio, ci siamo assicurati che nei venti minuti precedenti, le variazioni di temperatura fossero proporzionali ai tempi.

(Si vedano le tavole numeriche in cui son riferiti come esempio alcuni dati delle nostre esperienze).

2) Tutti i metodi proposti per questa correzione sono buoni, a condizione che la correzione risulti piccolissima. Se invece la correzione riesce grande, i diversi metodi danno risultati discordanti; ma si trova sempre un numero troppo grande per la quan-



La temperatura iniziale delle palline si è ammesso fosse uguale a quella del vapor d'acqua in ebullizione nella stufa e questa si deduceva dalla pressione atmosferica per mezzo delle tavole della tensione del vapor d'acqua di Regnault, ricalcolate dal Broch <sup>1)</sup>.

Della costanza della temperatura ci assicuravamo con un termometro in contatto colle palline.

La temperatura avanti l'immersione era perfettamente costante: ad esempio il 9 gennaio 1884 ottenemmo (l'altezza barometrica essendo 758,98).

*Termometro della stufa.*

Ore 9 10'	99, 962
15'	99, 963
20'	99, 961
25'	99, 963
30'	99, 962

Il termometro era letto col catetometro :

La colonna sporgeva un due centimetri onde evitare la evaporazione del mercurio già notata da diversi sperimentatori.

La riduzione della pressione al livello del mare e alla latitudine di 45° non la facemmo perchè non aveva influenza sensibile nelle nostre determinazioni <sup>2)</sup>.

tità di calore, quando il calorimetro tende molto a riscaldarsi, e troppo piccolo quando tende molto a raffreddarsi.

Questo argomento fu da noi studiato lungamente e i risultati sono esposti in una nota che fa seguito a questa memoria. (Bartoli e Stracciati — Sulle correzioni pel raffreddamento in termometria). Bullettino dell'Accademia Gioenia di Catania, fasc. XXVI.

Compara anche, Journal de Physique II, p. 345, 1873; X pag. 46 e 80 (1881); Annales de Chimie et de Physique, 4a. serie, T. XI pag. 948; Lehrbuch der experimental Physik, von Wüllner II, s. 398.

1) Broch, (*Trav. et Mém. du Bur. intern. de Poids et Mes.* I. A. 33. 1881).

2) A Firenze dove furon eseguite le esperienze coi metalli, la latitudine è 43°47', l'altitudine (Gabinetto di Fisica Via S. Gallo, 2° piano) inferiore ad 80 metri.

Nella formola

$$g = g_{45} (1 - 0,00259 \cos 2\phi) (1 - 0,000\,000\,196 H)$$

data dal sig. Auwers (Behm. Geograph Jahrb 6, pag. 697, anno 1876) dove  $g_{45}$  esprime l'intensità della gravità a 45° di latitudine e al livello del maro, e  $g$  quella in una

Non fu fatta la correzione per la variazione di pressione esterna prodotta dall'innalzamento del livello dell'acqua nel calorimetro dopo la immersione delle palline, perchè era piccolissima (sempre inferiore ad un millesimo di grado) e inoltre rimaneva costante in tutte le esperienze con uno stesso metallo.

Con ciascun metallo furono fatte da 200 a 400 determinazioni: dei valori trovati sperimentalmente e di tutti i dati che hanno servito al calcolo, diamo un saggio nella tavola seguente (IV): l'ultima colonna intitolata *calore specifico* rappresenta il calore specifico del metallo fra 100° e la temperatura finale del calorimetro, avendo preso come unità, il calore specifico medio dell'acqua fra la temperatura iniziale e quella finale del calorimetro.

Segue la tavola IV la quale serve, più che molte parole, a dare un'idea chiara del metodo tenuto nei calcoli.

stazione alla latitudine  $\phi$  all'altitudine  $H$ , ponendo  $\phi = 49^{\circ}47'$   $H = 80$  si ottiene

$$g = g_{45} \times 0,999\,875$$

perciò a Firenze, all'altitudine 80 metri, l'altezza barometrica 760<sup>mm</sup> equivale a quella di 759,905 alla latitudine di 45° ed all'altitudine zero.

Il punto di ebullizione dell'acqua a 759<sup>mm</sup>, 905 normali è 99°, 996.

Compara Broch, Trav. et Mém. du Bureau Inter. de Poids et Mes. I, A. 33, 1881.





# Tavola 1

Numero d'ordine	DATA		Nome del termometro calorimetrico	Posizione dello zero	Termometro immerso fino a	Temperatura dell'aria	Peso dell'acqua ridotta al vuoto (grammi)	Equivalente in acqua del calorimetro agitatore e termometro	Peso delle palline	T E		
										avanti		
										10'	5'	
	<b>1885</b>											
2416	Marzo	6	E	— 0° 040	8° 0	15° 0	7107,25	92,87	2831,62	costante		
2417	»	7	E	— 0,040	8,0	14,5	7136,07	92,87	2831,62	»		
2418	»	»	E	— 0,040	8,0	15,0	7143,25	92,87	2831,62	»		
2419	»	»	E	— 0,040	8,0	15,0	7131,89	92,87	2831,62	»		
2421	»	8	E	— 0,040	8,0	15,0	7116,79	92,87	2831,62	»		
2423	»	9	E	— 0,040	8,0	15,0	7145,35	92,87	2831,62	»		
2424	»	»	E	— 0,040	8,0	16,0	7120,10	92,87	2831,62	»		
2426	»	10	E	— 0,040	8,0	15,0	7124,63	92,87	2831,62	»		
2428	»	11	E	— 0,040	8,0	14,0	7156,27	92,87	2831,62	»		
2461	»	30	E	— 0,041	8,0	15,5	7140,12	92,87	2831,61	14° 220	14, 225	14
2462	»	»	E	— 0,041	8,0	16,0	7139,77	92,87	2831,61	14,088	14, 094	14
	<b>1885</b>											
2537	Luglio	3	S	+ 0,100	24° 1	29° 5	6667,94	92,82	2831,52	29° 788	29° 784	29
2538	»	»	S	+ 0,100	24,0	30,0	6735,87	92,79	2831,52	29,920	29,912	29
2550	»	8	S	+ 0,100	24,1	30,0	7008,84	92,82	2831,50	29,750	29,745	29
2551	»	»	S	+ 0,100	24,1	30,2	7101,26	92,82	2831,50	29,976	29,968	29
2554	»	9	S	+ 0,100	24,1	29,7	6823,35	92,82	2831,50	29,456	29,446	29
2557	»	10	S	+ 0,100	24,1	30,0	6885,65	92,82	2831,50	29,960	29,950	29
2559	»	»	S	+ 0,100	24,1	31,2	7067,35	92,82	2831,50	29,940	29,944	29
2563	»	13	S	+ 0,101	24,0	29,3	7125,38	92,79	2831,50	29,860	29,851	29
2564	»	»	S	+ 0,101	24,0	29,6	7209,74	92,79	2831,50	29,900	29,895	29
2561	»	11	S	+ 0,101	24,1	30,6	6968,45	92,82	2831,50	30,170	30,156	30

1) Cioè ridotte al termometro ad azoto.



Tavola IV. — RAME — Palline grandi.

Numero d'ordine	DATA			Nome del termometro calorimetrico	Posizione dello zero	Termometro immerso fino a	Temperatura dell'aria	Peso dell'acqua ridotto al vuoto (grammi)	Equivalente in acqua del calorimetro agitatore e termometro	Peso delle palline	TEMPERATURA DEL CALORIMETRO										Barometro ridotto a zero	Temperatura iniziale delle palline	Correzione pel raffreddamento dovuto al raggiamento ed al contatto dell'aria	CORREZIONE PER LA COLONNA DEL TERMOMETRO NON IMMERSA		Aumento di temperatura del calorimetro	Raffreddamento delle palline	Calorico specifico del rame																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
											avanti			iniziale	dopo					corrette <sup>1)</sup>				avanti	dopo																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
											10'	5'	2'		1'	3'	5'	7'	10'	iniziale									finale																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
	1885																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							

1) Cioè ridotte al termometro ad azoto.



2416  
2417  
2418  
2419  
2421  
2423  
2424  
2426  
2428  
2461  
2462

2537  
2538  
2550  
2551  
2554  
2557  
2559  
2563  
2564  
2561

Da questi valori del calore specifico delle palline abbiamo dedotto il calore specifico dell'acqua, tenendo conto della variazione del calore specifico del metallo col variare della temperatura, nel modo seguente.

Siano  $T$  e  $t$  la temperatura finale e l'iniziale del calorimetro (dopo fatte tutte le correzioni),  $P$  il peso dell'acqua,  $p$  il peso delle palline,  $C_{T,t}$  il calore specifico dell'acqua fra  $t^\circ$  e  $T^\circ$  (riferito ad una unità arbitraria, per es. al calore specifico vero a  $15^\circ$ ) e  $M_{100,T}$  il calore specifico del metallo (riferito alla stessa unità) fra  $100^\circ$  e  $T^\circ$ ; si avrà evidentemente

$$M_{100,T} (100 - T) p = C_{T,t} (T - t) P$$

e il calore specifico del metallo,  $m_{100,T}$ , registrato nelle tavole precedenti è stato calcolato, come si è detto, prendendo per unità, in ciascuna esperienza, il calorico specifico dell'acqua del calorimetro, cioè con la equazione

$$m_{100,T} (100 - T) p = (T - t) P$$

la quale combinata con la precedente dà

$$C_{T,t} = \frac{M_{100,T}}{m_{100,T}}$$

sicchè la determinazione di  $C_{T,t}$  era ridotta a quella di  $M_{100,T}$ .

Per questo calcolo noi abbiamo ricorso alle formule seguenti:

Pel platino, secondo Violle <sup>1)</sup>

$$q = 0,0317 T + 0,000\ 006 T^2$$

pel rame, secondo Naccari <sup>2)</sup>

$$q = 0,92\ 455 (T - 17^\circ) + 10,629 \times 10^{-6} (T - 17)^\circ$$

1) Violle, *Comptes Rendus*, t. LXXXV, pag. 543; 1877.

2) Naccari, *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*. vol. XXIII, Dicembre 1889, e *Nuovo Cimento*, 1890.

per lo stagno (secondo le nostre determinazioni)

$$q = 0,0556 T + 0,000\,012 T^2$$

per l'argento, secondo Naccari <sup>1)</sup>

$$q = 0,054\,984 (T - 23) + 10,076 \times 10^{-6} (T - 23)^2$$

per il piombo, secondo Naccari <sup>1)</sup>

$$q = 0,029\,93 (T - 15) + 6,7923 \times 10^{-6} (T - 15)^2$$

dove  $q$  indica la quantità totale di calore, riferita all'unità di peso; ed abbiamo accettato per coefficiente di variazione del calorico specifico quello trovato da noi e dai citati sperimentatori per gli stessi metalli, ossia abbiamo ammesso che i calorici specifici del platino, argento, rame etc. da noi adoprati fossero proporzionali ai calorici specifici del platino, argento, rame, etc. studiati da Violle e da noi, e da Naccari, fra due temperature qualunque comprese fra  $0^\circ$  e  $100^\circ$  <sup>2)</sup>). Così si poteva avere all'infuori di un fattore costante, diverso da un metallo all'altro, il valore di  $M_{100,T}$  pei metalli da noi adoprati e quindi il valore di  $C_{T,t}$  moltiplicato per la stessa costante, la quale fu determinata, come poi vedremo, in modo da rendere uguale a 1 il calore specifico vero dell'acqua + a  $15^\circ$  <sup>3)</sup>).

1) Naccari, *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, Vol. XXIII, Dicembre 1889 e *Nuovo Cimento*, 1890.

2) I metalli da noi impiegati erano abbastanza puri e ci sembra lecito ammettere che si comportassero come quelli impiegati dal Violle e dal Naccari — Per lo stagno le misure furon fatte sulle stesse palline da noi adoperate — Del resto, le correzioni per la variazione del calore specifico col variare della temperatura, non portano che piccola differenza nel risultato finale.

3) Per calcolare  $\alpha M_{100,T}$  si deduce facilmente la formola

$$\alpha M_{100,T} = a + b (100 + T)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \alpha M_{100,T} &= \frac{q_{100} - q_T}{100 - T} = \frac{a \cdot 100 + b \cdot 100^2 - aT - bT^2}{100 - T} \\ &= a \frac{100 - T}{100 - T} + b \frac{100^2 - T^2}{100 - T} = a + b (100 + T) \end{aligned}$$

Per fare questi calcoli non si adoprarono separatamente i risultati di ogni singola esperienza, ma credemmo conveniente di raggruppare quelle per le quali le temperature iniziali e finali del calorimetro differivano di poco, e di adoprare le medie dei valori di  $t$ ,  $T$  e  $m_{100,T}$ . Così si ottennero, per ogni metallo, da 16 a 30 gruppi, ciascheduno composto di 8 a 15 esperienze.

Qui diamo come esempio tutti i valori che hanno servito per il calcolo del calore specifico del rame (palline grandi).

Tavola V. — RAME palline grandi.

Num. d'ord.	Termometro	$t$	T	$m_{100,T}$
2439	U	0° 6034	4° 1430	0,092529
2453	U	0,5204	3,9990	092361
2455	U	0,5993	4,0570	092498
2456	U	0,6156	4,0870	092474
Media		0,5847	4,0715	0,092466
2440	U	1° 1810	4° 7180	0,092440
2442	U	1,8062	5,1470	92424
2443	U	1,6422	5,0590	92452
2454	U	1,3850	4,8660	92355
2458	U	1,1130	4,5780	92410
2460	U	1,5669	4,9740	92467
Media		1,4490	4,8903	0,092425
2365	U	2° 6566	6° 0580	0,092321
2375	U	2,3328	5,7590	92319
2444	U	2,7859	6,1420	92368
2445	U	2,3083	5,7090	92476
2446	U	1,9033	5,3192	92483
2447	U	2,7273	6,1640	92340
2448	U	2,4819	5,8386	92357
Media		2,4566	5,8557	0,092380
2376	U	3° 1556	6° 5620	0,092304
2438	U	3,0960	6,4690	92289
2449	U	3,8180	7,1515	92409
2373	U	3,9495	7,3198	92400
Media		3,5048	6,8756	0,092351



*Segue Tavola V.*

Num. d' ord.	Termometro	$t$	$T$	$m_{100.T}$
2367	U	4° 0190	7° 3812	0,092281
2388	U	4,0650	7,4267	92266
2369	U	4,2850	7,6455	92402
2471	U	4,0120	7,3841	92389
2372	U	4,8535	7,6950	92183
2374	U	4,1390	7,5060	92285
2377	U	4,2310	7,5890	92451
2387	U	4,2030	7,5880	92423
Media		4,1634	7,5269	0,092335
2381	T	5° 6668	8° 9520	0,092395
2382	T	5,7390	9,0320	92381
2384	T	5,6830	8,9820	92397
2385	T	5,8590	9,1910	92245
Media		5,7369	9,0392	0,092355
2379	T	6° 0414	9° 3110	0,092338
2386	T	6,3918	9,6780	92406
2390	T	6,0375	9,3310	92431
2391	T	6,4512	9,7480	92298
2436	T	6,2047	9,4800	92483
Media		6,2253	9,5096	0,092391
2348	T	8° 5168	11° 7430	0,092756
2350	T	8,3276	11,5743	92773
2351	T	8,4144	11,6389	92781
2352	T	8,4481	11,6830	92636
2353	T	8,4204	11,6349	92743
2354	T	8,7817	11,9854	92777
2355	T	8,7500	11,9570	92604
2356	T	8,6807	11,8763	92706

*Segue Tavola V.*

Num. d' ord.	Termometro	<i>t</i>	T	<i>m</i> <sub>100,T</sub>
2357	T	8° 7302	11° 9167	92596
2358	T	8 ,7263	11 ,9369	92830
2359	T	8 ,5325	11 ,7430	92668
2360	T	8 ,8926	12 ,0985	92685
2361	T	8 ,9005	12 ,1066	92794
2362	T	8 ,9203	12 ,1187	92822
2363	T	8 ,6136	11 ,8197	92610
Media		8 ,6437	11 ,8555	0,092719
2393	E	9° 9130	13° 0940	0,092781
2396	E	9 ,9560	13 ,1440	92886
2401	E	9 ,9892	13 ,1610	92743
2402	E	9 ,9892	13 ,1500	92924
2403	E	9 ,7890	12 ,9640	92796
2404	E	9 ,6970	12 ,8640	92803
2406	E	9 ,7570	12 ,9340	92809
Media		9 ,8701	13 ,0444	0,092820
2392	E	10° 3910	13° 5640	0,092749
2398	E	10 ,1100	13 ,2740	92916
2399	E	10 ,1100	13 ,3000	92886
2400	E	10 ,6599	13 ,8020	92828
2405	E	10 ,1300	13 ,2690	92899
2407	E	10 ,1500	13 ,3240	92892
2408	E	10 ,2640	13 ,4740	92873
2409	E	10 ,0458	13 ,2420	92758
2410	E	10 ,3306	13 ,5120	92850
2411	E	10 ,0780	13 ,2420	92905
2412	E	10 ,1100	13 ,2860	92835
2413	E	10 ,9010	14 ,0280	92976
2429	E	10 ,1700	13 ,3480	92860
2430	E	10 ,0296	13 ,2040	92399
2431	E	10 ,3064	13 ,4420	92734

*Segue Tavola V.*

Num. d' ord.	Termometro	$t$	$T$	$m_{100,T}$
2432	E	10° 2270	13° 3890	92773
2433	E	10 ,1780	13 ,3200	92800
2434	E	10 ,1340	13 ,2700	92922
2435	E	10 ,2862	13 ,4260	92724
Media		10 ,2427	13 ,4587	0,092846
2414	E	13° 6740	16° 7006	0,093113
2415	E	13 ,8640	16 ,8600	92989
2420	E	13 ,8890	16 ,9266	92931
2422	E	13 ,9140	16 ,9256	92948
2425	E	13 ,9100	16 ,9345	93077
2427	E	13 ,8840	16 ,8816	93010
2452	E	13 ,8620	16 ,8184	93104
Media		13 ,8567	16 ,8639	0,093025
2416	E	14° 2530	17° 2568	0,093049
2417	E	14 ,0590	17 ,0695	93096
2418	E	14 ,0980	17 ,1064	93158
2419	E	14 ,3450	17 ,3470	93008
2421	E	14 ,1817	17 ,1980	93000
2423	E	14 ,0060	17 ,0156	93115
2424	E	14 ,3310	17 ,3353	93014
2426	E	14 ,1936	17 ,1980	92946
2428	E	14 ,0820	17 ,0868	93154
2461	E	14 ,2233	17 ,2255	93055
2462	E	14 ,0940	17 ,1006	93010
Media		14 ,1697	17 ,1763	0,093055
2335	E	16° 2876	19° 2400	0,092910
2336	E	16 ,1632	19 ,1000	92943
2337	E	16 ,3244	19 ,2720	92900

*Segue Tavola V.*

Num. d' ord.	Termometro	$t$	T	$m_{100,T}$
2339	E	16° 1448	19° 0800	0,092997
2340	E	16 ,1774	19 ,1240	92978
2342	E	16 ,2142	19 ,1600	92818
2343	E	16 ,2897	19 ,2320	92866
2344	E	16 ,3909	19 ,3400	92945
2345	E	16 ,0857	19 ,0600	93115
2346	E	16 ,2387	19 ,2040	92988
2347	E	16 ,1367	19 ,1040	93012
Media		16 ,2230	19 ,1742	0,092952
2464	G	18° 7976	21° 6025	0,092888
2467	G	18 ,5709	21 ,5095	93159
2466	G	18 ,2036	21 ,1190	93048
2468	G	18 ,5897	21 ,5451	93139
2469	G	18 ,6194	21 ,5451	93268
2470	G	18 ,5145	21 ,4600	93048
2473	G	18 ,4630	21 ,4360	93038
2474	G	18 ,8870	21 ,8273	93207
2475	G	18 ,7164	21 ,7140	93124
2476	G	18 ,7184	21 ,6263	93151
2477	G	18 ,5699	21 ,5095	93082
2478	G	18 ,5360	21 ,5243	93100
2479	G	18 ,5976	21 ,4976	93112
2480	G	18 ,7620	21 ,6960	92985
2481	G	18 ,6511	21 ,5293	93052
2482	G	18 ,5798	21 ,5006	93027
Media		18 ,6111	21 ,5402	0,093089
2318	G	20° 8460	23° 6459	0,093106
2319	G	20 ,6920	23 ,5024	93408
2320	G	20 ,4200	23 ,2450	93402
2322	G	20 ,5460	23 ,3044	93240
2323	G	20 ,5400	23 ,3004	93321

*Segue Tavola V.*

Num. d'ord.	Termometro	t	T	$m_{100,T}$
2325	G	20° 8220	23° 6204	0,093155
2326	G	20 ,7220	23 ,5182	93197
2327	G	20 ,7260	23 ,5064	93091
2328	G	20 ,5760	23 ,3737	93049
2330	G	20 ,5680	23 ,3796	93374
2332	G	20 ,4800	23 ,2945	93410
Media		20 ,6307	23 ,4264	0,093250
2496	G	21° 8750	24° 6950	0,093421
2502	G	21 ,6720	24 ,5915	93190
2505	G	21 ,8194	24 ,6990	93134
2506	G	21 ,6520	24 ,5000	93403
2485	G	21 ,9788	24 ,7469	93248
2486	G	21 ,9827	24 ,8720	93233
2504	G	21 ,9768	24 ,8112	93302
Media		21 ,8509	24 ,7029	0,093276
2483	G	22° 0025	24 ,7647	0,093205
2484	G	22 ,1690	24 ,8820	93215
2487	G	22 ,1174	24 ,9280	93411
2488	G	22 ,6579	25 ,4610	93351
2489	G	22 ,3124	25 ,1663	93296
2490	G	22 ,4850	25 ,3170	93200
2491	G	22 ,1930	25 ,0806	93234
2498	G	22 ,2210	25 ,1281	93271
2499	G	22 ,6500	25 ,4970	93411
2500	G	22 ,0976	25 ,9904	93305
2501	G	22 ,1930	25 ,1461	93234
Media		22 ,2817	25 ,1237	0,093285

*Segue Tavola V.*

Num. d' ord.	Termometro	$t$	$T$	$m_{100,T}$
2492	G	23° 8110	26° 5760	0,093291
2493	G	23 ,4727	26 ,3360	93227
2509	G	23 ,8770	26 ,5940	93182
2510	G	23 ,9450	26 ,7660	93247
2513	G	23 ,8590	26 ,6060	93254
Media		23 ,7929	26 ,5756	0,093240
2300	G	24° 1800	26° 8560	0,093288
2301	G	24 ,7430	27 ,4050	93131
2302	G	24 ,0070	26 ,7080	93269
2303	G	24 ,1600	26 ,8560	93078
2305	G	24 ,0794	26 ,7720	93070
2306	G	24 ,0925	26 ,7160	92947
2307	G	24 ,1600	26 ,8600	93211
2308	G	24 ,8063	27 ,4690	93284
2309	G	24 ,1560	26 ,8520	93288
2310	G	24 ,1900	26 ,8410	92994
2311	G	24 ,2800	26 ,9260	93220
2312	G	24 ,4600	27 ,1360	93161
2314	G	24 ,3800	27 ,0760	93169
2315	G	24 ,4000	27 ,1200	93159
2316	G	24 ,1198	26 ,8760	93037
2317	G	24 ,6390	27 ,4170	93276
2507	G	24 ,0090	26 ,8260	93284
2508	G	24 ,3680	27 ,2522	93206
2511	G	24 ,2840	27 ,0600	93158
2512	G	24 ,0210	26 ,9700	93273
Media		24 ,2767	26 ,9997	0,093175
2516	S	25° 7470	28° 5180	0,093210
2518	S	25 ,6884	28 ,4060	93127
2519	S	25 ,7670	28 ,4990	93248
2520	S	25 ,7510	28 ,5150	93283

*Segue Tavola V.*

Num. d'ord.	Termometro	$t$	$T$	$m_{100,T}$
2523	S	25° 6676	28° 4180	0,093204
2524	S	25,7790	28,5790	93221
2525	S	25,4920	28,2980	93192
2526	S	25,4910	28,1970	93197
2528	S	25,6478	28,3540	93174
2514	S	25,9110	28,6740	93184
2527	S	25,9650	28,6270	93171
2517	S	25,9650	28,7380	93225
Media		25,7393	28,4852	0,093203
2521	S	26° 0230	28° 7860	0,093242
2522	S	26,4170	29,1100	93225
Media		26,2200	28,9480	0,93233
2531	S	27° 7896	30° 5160	0,093508
2532	S	27,7452	30,3460	93213
2534	S	27,7210	30,4280	93298
2535	S	27,7371	30,4040	93206
2539	S	27,6890	30,3470	93201
2544	S	27,8078	30,4440	93277
2546	S	27,8199	30,4440	93313
2547	S	27,5730	30,2560	93194
2548	S	27,7050	30,2820	93260
2530	S	27,8340	30,4980	93331
2545	S	27,8360	30,5320	93239
Media		27,7504	30,4037	0,093276
2540	S	28° 0280	30° 7230	0,093456
2541	S	28,4060	30,0030	93229

*Segue Tavola V.*

Num. d' ord.	Termometro	$t$	$T$	$m_{100,T}$
2542	S	28° 5500	31° 1159	0,093325
2543	S	28,2540	30,8750	93369
Media		28,3095	30,9292	0,093345
2537	S	29° 6050	32° 2490	0,093391
2538	S	29,7290	32,3468	93552
2550	S	29,5650	32,0880	93545
2551	S	29,7850	32,2650	93433
2554	S	29,2620	31,8640	93694
2557	S	29,7650	32,3230	93600
2559	S	29,7730	32,2710	93675
2563	S	29,6670	32,1458	93645
2564	S	29,7150	32,1636	93640
2561	S	29,9640	32,4820	93537
Media		29,6830	32,2198	0,093571

*( Continua ).*





CONSIDERAZIONI SULLA TEORIA MATEMATICA DEL MAGNETISMO;  
MEMORIA DEL PROF. EUGENIO BELTRAMI <sup>1)</sup>.

§ 17. Si è fatto allusione, nei §§ 12 e 13, alla possibilità di attribuire alla funzione  $\psi$  una forma diversa dalla quadratica. Or ecco qualche breve cenno in proposito, limitato per semplicità, al caso dei corpi isotropi.

Si osservi primieramente che le equazioni d'induzione magnetica (16) sussistono per qualsiasi forma della funzione  $\psi$ , qualora si considerino come ricavate dal porre  $= 0$  la variazione del potenziale totale  $P$ .

Nel caso d'un corpo isotropo, in cui la funzione  $\psi$  non può dipendere che dall'unico argomento  $m$ , quelle equazioni esprimono che l'asse magnetico è in ogni punto  $(a, b, c)$  diretto nel senso della forza magnetica totale  $F$  di componenti

$$-\frac{d(V_0 + V)}{da}, \quad -\frac{d(V_0 + V)}{db}, \quad -\frac{d(V_0 + V)}{dc},$$

mentre la grandezza  $m$  del momento indotto è data da

$$(21) \quad \psi'(m) = F^2.$$

Se si ammette l'ipotesi quadratica, cioè se si pone

$$(21)_a \quad \psi(m) = \frac{m^2}{2\kappa},$$

dove  $\kappa$  è il coefficiente di suscettibilità del corpo, ha luogo la relazione:

$$(21)_b \quad \psi'(m) = \frac{m}{\kappa} = F,$$

1) *Continuazione e fine.* V. pag. 50.

2) Se si assumesse una funzione  $k$  di  $m$ , tale che quest'equazione (21) prendesse la forma  $m = kF$ , si avrebbe

$$\frac{m}{k} = \psi'(m), \quad \text{dove} \quad \psi(m) = \int \frac{mdm}{k},$$

e la forma che ne risulterebbe (14) per  $P(V)$  si troverebbe in accordo coll'espressione generale  $\mathfrak{U}$  dell'energia magnetica, data da C. Neumann nella Memoria già citata, equazione (28).

che stabilisce la proporzionalità fra il momento  $m$  e la forza  $F$ .

Egli è appunto perchè l'esperienza non conferma tale proporzionalità, se non per moderate intensità di forza inducente, ed accenna invece, per induzioni d'intensità sempre crescente, all'esistenza d'un limite superiore finito per il valore del momento unitario indotto, che è stata congetturata la possibilità di una relazione d'altra forma fra  $F$  ed  $m$ , relazione che dovrebbe ridursi alla forma (21)<sub>b</sub> per valori molto piccoli di queste due grandezze.

Che tale possibilità non ripugni punto alla imprescindibile condizione (§ 12) del dover essere  $\psi$  una grandezza omogenea col quadrato di un momento unitario, risulta dalla semplicissima considerazione seguente.

Se esiste, per il dato corpo isotropo, un valore assoluto  $M$  del momento unitario, il quale sia limite superiore d'ogni possibile valore del momento indotto in esso corpo, questa grandezza  $M$  non può non essere un *parametro magnetico* essenziale, che deve, come tale, intervenire nell'espressione della funzione  $\psi$  caratteristica per il corpo nei riguardi magnetici. Ciò posto, per essere il rapporto  $m:M$  un numero astratto, basta formare un'espressione del tipo

$$\psi(m) = M^2 \chi\left(\frac{m}{M}\right).$$

per ottenere una classe molto generale di funzioni  $\psi(m)$ , soddisfacenti alla duplice condizione di contenere il parametro  $M$  e di rappresentare una quantità omogenea col quadrato d'un momento unitario (supposto che la funzione arbitraria  $\chi$  sia, per se stessa, di dimensione zero). Collo stesso tipo di funzioni si può poi, ed in infiniti modi, soddisfare anche alle altre condizioni, egualmente necessarie, che  $\psi$  si riduca alla forma (21)<sub>a</sub> per piccoli valori di  $m$  e dia luogo alla convergenza di  $m$  verso il valore limite  $M$ , quando la forza  $F$  cresca indefinitamente. Se si pone, per semplicità,

$$\frac{m}{M} = \theta,$$

queste ultime condizioni richiedono che sia

$$\chi(\theta) = \frac{\theta^2}{2x}, \quad \chi'(\theta) = \frac{\theta}{x}$$

per  $\theta$  infinitamente piccolo e

$$\chi'(\theta) = \infty$$

per  $\theta = \pm 1$ .

Una funzione semplicissima che soddisfa alle due condizioni per  $\chi'(\theta)$  è

$$\chi'(\theta) = \frac{\theta}{x\sqrt{1-\theta^2}},$$

dove, integrando e determinando la costante in modo da soddisfare alla condizione per  $\chi(\theta)$ , si deduce:

$$\chi(\theta) = \frac{1 - \sqrt{1-\theta^2}}{x}$$

e conseguentemente

$$(21)_c \quad \psi(m) = \frac{M(M - \sqrt{M^2 - m^2})}{x}$$

(radicale positivo). La relazione fra il momento  $m$  e la forza  $F$  è, per tale funzione,

$$(21)_d \quad F = \frac{Mm}{x\sqrt{M^2 - m^2}}, \quad \text{ovvero} \quad m = \frac{xMF}{\sqrt{M^2 + x^2 F^2}}$$

ossia ancora, in forma razionale,

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{M^2},$$

dove  $m$  ( $= xF$ ) designa il valore che spetterebbe al momento magnetico, nell'ordinaria ipotesi quadratica.

Questa determinazione speciale (certamente in parte arbitraria) della funzione  $\psi(m)$  s'accorda coi risultati delle considerazioni, di diversissima natura, esposte da Kirchhoff nell'Appendice alla celebre Memoria del 1853 *Ueber den inducirten Magnetismus* etc., dove però non è data veruna indicazione concreta

circa la natura della funzione ivi indicata con  $F(u)$  <sup>1)</sup>. Questa funzione riceverebbe quì l'espressione

$$F(u) = \frac{M \kappa}{\sqrt{M^2 + \kappa^2 u^2}},$$

dove la costante  $M$  corrisponde a quella che Kirchhoff denota invece con  $K$ . Nel citato passo (*Gesammelte Abhandlungen*, p. 221) Kirchhoff riporta i risultati numerici di 14 esperienze di Weber, donde si possono ricavare i valori delle attuali costanti  $M$  e  $\kappa$  col metodo dei minimi quadrati. Un valoroso cultore e promotore di questo metodo, l'egregio Prof. P. Pizzetti, ha avuto la compiacenza, della quale gli sono riconoscentissimo, d' eseguire i calcoli necessari all' uopo, ed ha trovato i valori seguenti:

$$M = 13135,2 \pm 203,9, \quad \kappa = 29,0369 \pm 0,55,$$

dove i numeri che seguono il segno  $\pm$  rappresentano l'error medio gaussiano. Con tali valori di  $M$  e  $\kappa$  gli errori residui di  $F(u)$  non eccedono 0,7.

§ 18. Passando ora a considerare le distribuzioni polari di superficie (§ 1) conviene prendere in esame l'integrale:

$$\int \left( \frac{dU}{da} l_a + \frac{dU}{db} l_b + \frac{dU}{dc} l_c \right) d\sigma,$$

dove  $U$  è funzione continua e finita nei punti  $(a, b, c)$  della superficie  $\sigma$ .

Riferita questa superficie ad un sistema di coordinate curvilinee  $p, q$ , talchè il quadrato dell'elemento lineare prenda la nota forma

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2,$$

si ponga <sup>2)</sup>:

1) La quale non è altro che la funzione  $k$  della Nota precedente, espressa per  $F$  (cioè presso Kirchhoff, per  $u$ ) anzichè per  $m$ .

2) Sono da confrontarsi, per le cose che seguono, le due Note del 1883 *Sulla teoria degli strati magnetici* e *Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche*, nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo.

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} l_a = l_n \frac{da}{dn} + \lambda_p \frac{da}{dp} + \lambda_q \frac{da}{dq} , \\ l_b = l_n \frac{db}{dn} + \lambda_p \frac{db}{dp} + \lambda_q \frac{db}{dq} , \\ l_c = l_n \frac{dc}{dn} + \lambda_p \frac{dc}{dp} + \lambda_q \frac{dc}{dq} , \end{array} \right\} .$$

dove  $l_n$  è la componente del momento  $l$  secondo la normale  $n$  alla superficie, mentre  $\lambda_p \sqrt{E}$  e  $\lambda_q \sqrt{G}$  sono le componenti tangenziali (oblique) del medesimo momento nei sensi in cui crescono i parametri  $p$  e  $q$ , rispettivamente. La direzione  $n$  s'intende scelta in modo che la rotazione ( $< \pi$ ) da  $p$  verso  $q$  si faccia, intorno ad  $n$ , nello stesso verso di quella da  $x$  verso  $y$ , intorno all'asse delle  $z$ . Sostituendo nel proposto integrale i precedenti valori di  $l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$ , si trova ch'esso è equivalente all'espressione

$$\int \frac{dU}{dn} l_n d\sigma + \int \left( \frac{dU}{dp} \lambda_p + \frac{dU}{dq} \lambda_q \right) d\sigma ,$$

Si rammentino ora le formole di trasformazione:

$$\int \frac{d\chi}{dp} \frac{d\sigma}{H} = - \int \left( E \frac{dp}{dv} + F \frac{dq}{dv} \right) \frac{\chi ds}{H} ,$$

$$(H = \sqrt{EG - F^2})$$

$$\int \frac{d\chi}{dq} \frac{d\sigma}{H} = - \int \left( F \frac{dp}{dv} + G \frac{dq}{dv} \right) \frac{\chi ds}{H} ,$$

dove  $\chi$  è funzione continua delle variabili  $p, q$  entro un qualunque pezzo  $\sigma$  di superficie, di cui  $s$  sia il contorno e  $v$  la direzione della normale interna a questo contorno, condotta tangenzialmente alla superficie. Da queste formole si ha:

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \frac{d(HU\lambda_p)}{dp} + \frac{d(HU\lambda_q)}{dq} \right\} \frac{d\sigma}{H} \\ &= - \int U \left\{ (E\lambda_p + F\lambda_q) \frac{dp}{dv} + (F\lambda_p + G\lambda_q) \frac{dq}{dv} \right\} ds ; \end{aligned}$$

ma dalle equazioni (22), ponendo per brevità:

$$(22)_a \quad \begin{cases} l_p = l_a \frac{da}{dp} + l_b \frac{db}{dp} + l_c \frac{dc}{dp} , \\ l_q = l_a \frac{da}{dq} + l_b \frac{db}{dq} + l_c \frac{dc}{dq} , \end{cases}$$

risulta

$$(22)_b \quad l_p = E\lambda_p + F\lambda_q, \quad l_q = F\lambda_p + G\lambda_q;$$

dundue

$$\int \left( \frac{dU}{dp} \lambda_p + \frac{dU}{dq} \lambda_q \right) d\sigma + \int [\lambda] U d\sigma + \int U l_v ds = 0,$$

dove  $l_v$  è la componente del momento  $l$  secondo la direzione  $v$  e dove il simbolo  $[\lambda]$  rappresenta l'espressione:

$$(22)_c \quad [\lambda] = \frac{1}{H} \left\{ \frac{d(H\lambda_p)}{dp} + \frac{d(H\lambda_q)}{dq} \right\},$$

la quale si può scrivere anche così:

$$(22)_c' \quad [\lambda] = \frac{1}{H} \left\{ \frac{d}{dp} \left( \frac{G l_p - F l_q}{H} \right) + \frac{d}{dq} \left( \frac{E l_q - F l_p}{H} \right) \right\}.$$

Per tal modo si ottiene definitivamente:

$$(23) \quad \int \left( \frac{dU}{da} l_a + \frac{dU}{db} l_b + \frac{dU}{dc} l_c \right) d\sigma - \int \frac{dU}{dn} l_n d\sigma + \int U h d\sigma + \int U g ds,$$

dove

$$(23)_a \quad h = -[\lambda], \quad g = -(l_v + l'_v),$$

$v$  e  $v'$  essendo le due opposte normali in ogni punto d'una *linea di discontinuità* della superficie  $\sigma$ , cioè d'ogni linea  $s$  lungo la quale il momento  $l$  sia discontinuo. Fra queste linee  $s$  s'intendono comprese anche le *linee terminali*, quando esistono, e per esse si deve prendere per  $v$  la normale *interna*, ponendo  $l'_v = 0$ , cioè  $g = -l_v$ .

L'equazione (23) può essere considerata come analoga alla (2) del § 2.

Supponendo  $(x, y, z)$  punto esterno alla superficie e ponendo

$$U = \frac{1}{r},$$

si ottiene di qui la funzione potenziale  $V$  della distribuzione polare di superficie sotto la doppia forma:

$$(24) \quad V = \int \left( \frac{d}{da} \frac{1}{r} l_a + \frac{d}{db} \frac{1}{r} l_b + \frac{d}{dc} \frac{1}{r} l_c \right) d\sigma,$$

$$(24)_a \quad V = \int \frac{d}{dn} \frac{1}{r} l_n d\sigma + \int \frac{h d\sigma}{r} + \int \frac{g ds}{r}.$$

La seconda di queste due espressioni di  $V$  non presenta lo stesso carattere dell'analogia (3)<sub>a</sub>, relativa ad una distribuzione in tre dimensioni: essa non appartiene, cioè, come quest'ultima, ad un'ordinaria funzione potenziale newtoniana. Il primo dei suoi tre termini appartiene invece allo stesso tipo dell'altra espressione (24), giacchè esso può scriversi così:

$$\int \left( \frac{d}{da} \frac{1}{r} l_n \frac{da}{dn} + \frac{d}{db} \frac{1}{r} l_n \frac{db}{dn} + \frac{d}{dc} \frac{1}{r} l_n \frac{dc}{dn} \right) d\sigma;$$

presentando però l'importante particolarità che la polarizzazione  $l_n$  è dovunque diretta *normalmente* alla superficie.

Le funzioni potenziali di questo tipo speciale, dette di *doppio strato*, hanno proprietà notissime, dalle quali scaturiscono per  $V$  le due equazioni generali:

$$(24)_b \quad V_n - V_n' = 4\pi l_n, \quad \frac{dV}{dn} + \frac{dV'}{dn'} = -4\pi h.$$

Tali funzioni, che pur si presentano spontaneamente nella dottrina classica del potenziale newtoniano (per esempio nel teorema di Green), debbono riguardarsi come irreducibili, in senso proprio, colle funzioni potenziali ordinarie. La riducibilità a queste ultime funzioni ha luogo invece, come risulta dalla stessa espressione (24)<sub>a</sub>, per le distribuzioni superficiali a polarizzazione *tangenziale*, cioè per quelle in cui è dovunque  $l_n = 0$ . Per

queste sole, o per la sola *parte tangenziale* d'una distribuzione qualunque, ha luogo produzione di *magnetismo libero*, colla densità superficiale  $h$  in ogni punto di  $\sigma$  e colla densità lineare  $g$  in ogni punto di  $s$ .

Ponendo nell'equazione (23)  $U = 1$ , si ottiene:

$$(24)_c \quad \int h d\sigma + \int g ds = 0,$$

equazione che contiene il teorema analogo a (4). Ponendo invece successivamente  $U = a, b, c$  si ottiene:

$$\int l_a d\sigma = \int l_a \frac{da}{dn} d\sigma + \int a h d\sigma + \int a g ds,$$

$$\int l_b d\sigma = \int l_b \frac{db}{dn} d\sigma + \int b h d\sigma + \int b g ds,$$

$$\int l_c d\sigma = \int l_c \frac{dc}{dn} d\sigma + \int c h d\sigma + \int c g ds,$$

equazioni che fanno riscontro alle (5), ma nei secondi membri delle quali figura un termine di più dovuto alla polarizzazione normale irreducibile  $l_a$ .

Se ad  $U$  si attribuisce, nella formola (23), il significato di funzione potenziale magnetica d'un sistema non avente punti comuni colla superficie  $\sigma$ , i due membri di quella formola devono considerarsi come espressioni equivalenti del potenziale mutuo di questo sistema esterno e della distribuzione magnetica superficiale. Ma la completa discussione delle varie forme sotto cui questo potenziale mutuo può presentarsi, in circostanze più generali, non si potrebbe opportunamente svolgere senza invocare le formole dell'elettromagnetismo: epperò giova restringere alle poche deduzioni precedenti ciò che qui importava di dire intorno alle distribuzioni magnetiche di superficie. Queste deduzioni contengono già, in particolare, le formole necessarie alla dimostrazione dell'equivalenza d'ogni distribuzione magnetica ad una distribuzione di correnti chiuse <sup>1)</sup>.



1) Veggasi la citata Nota *Sull'equivalenza etc.*



SULLA DEFORMAZIONE DI UNA SFERA OMOGENEA ISOTROPA ( PER DATI  
SPOSTAMENTI DE' PUNTI DELLA SUPERFICIE )<sup>1)</sup>; NOTA DEL PROF.  
VALENTINO CERRUTI.

Ho calcolato con un nuovo procedimento la deformazione di una sfera omogenea isotropa nella doppia ipotesi che sieno dati o gli spostamenti de' punti della superficie o le forze esterne applicate a' singoli elementi della medesima. In questa Nota considero solamente il primo dei due casi: al secondo che richiede sviluppi più estesi, ho dedicato un lavoro il quale comparirà fra breve negli *Atti della R. Acc. dei Lincei*. Quanto al metodo in sè il lettore troverà tutti gli schiarimenti de' quali può aver bisogno nella mia Memoria: *Ricerche intorno all' equilibrio dei corpi elastici isotropi*<sup>2)</sup>.

1. Incomincio coll'assegnare gli spostamenti  $\xi, \eta, \zeta$  paralleli ad un sistema di assi ortogonali, de' quali suppongo l'origine nel centro della sfera, quando sugli elementi di massa non agiscono forze esterne e gli spostamenti de' punti della superficie sono

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{R},$$

dove è  $R = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ , e le  $x, y, z; x_1, y_1, z_1$  rappresentano rispettivamente le coordinate di un punto variabile e di un punto fisso, ma scelto questo secondo ad arbitrio nell'interno della sfera. A questo fine conviene scomporre gli spostamenti  $\xi, \eta, \zeta$  in due gruppi, rappresentati entrambi da tre funzioni finite, continue, monodrome e tali che le tre funzioni  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  del primo gruppo soddisfino nell'interno della sfera all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , e prendano in superficie i valori (1); e le tre

1) Traduzione dall'originale francese. V. *Ass. franc. pour l'avanc. des Sciences. Comptes-Rendus* de la 14<sup>e</sup> Session. Grenoble, 1885, seconde partie, p. 68-79.

2) *Acc. r. de' Lincei. Memorie della Classe di Sc. fis. mat. e nat. Serie 3., t. XIII*, p. 81-122.

funzioni  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  del secondo gruppo si annullino in superficie e soddisfino nell'interno della sfera alle equazioni

$$\Delta^2 \xi_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \quad \Delta^2 \eta_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0, \quad \Delta^2 \zeta_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0,$$

nelle quali  $\vartheta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ , ed  $\Omega, \omega$  designano rispettivamente le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali in un mezzo isotropo indefinito composto della medesima sostanza che la sfera.

Gli spostamenti del primo gruppo si deducono con molta facilità nel modo seguente: la funzione  $\frac{1}{T}$ , in cui

$$T^2 = a^4 + (x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2a^2(xx_1 + yy_1 + zz_1),$$

$a$  essendo il raggio della sfera, è finita, continua, monodroma e soddisfa all'equazione  $\Delta^2 = 0$  per  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  e per  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  soddisfa inoltre alle equazioni particolari

$$a \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R}, \quad a \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R}, \quad a \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{R};$$

si avrà dunque senz'altro

$$(2) \quad \xi_1 = a \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{1}{T}, \quad \eta_1 = a \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{T}, \quad \zeta_1 = a \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{T}.$$

Per ottenere gli spostamenti del secondo gruppo si faccia

$$\xi_1 = \xi_1' - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2} x \vartheta, \quad \eta_1 = \eta_1' - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2} y \vartheta, \quad \zeta_1 = \zeta_1' - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2} z \vartheta;$$

le funzioni  $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$ , le quali soddisfano per  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , e per  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  prendono rispettivamente i valori

$$\xi_1' = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2} x \vartheta, \quad \eta_1' = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2} y \vartheta, \quad \zeta_1' = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2} z \vartheta,$$

si potranno mettere sotto la forma

$$\xi_1' = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^2} \frac{a^2 - r^2}{a} \int \frac{r' \vartheta'}{e^3} ds, \quad \eta_1' = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^2} \frac{a^2 - r^2}{a} \int \frac{y' \vartheta'}{e^3} ds, \quad \zeta_1' = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^2} \frac{a^2 - r^2}{a} \int \frac{z' \vartheta'}{e^3} ds,$$

dove  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $e^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$ ,  $\mathfrak{P}'$  è il valore di  $\mathfrak{P}$  nel punto  $x', y', z'$ ;  $ds$  un elemento di superficie della sfera. Ma le proprietà note della funzione  $\mathfrak{P}$  ci permettono di scrivere

$$(3) \quad \mathfrak{P} = \frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int \frac{\mathfrak{P}' ds}{e^3},$$

e in conseguenza

$$\xi_1 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^3} \frac{a^2 - r^2}{a} \int \frac{(x' - x)\mathfrak{P}' ds}{e^3} = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^3} \frac{a^2 - r^2}{a} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\mathfrak{P}' ds}{e}$$

od anche, posto  $H = \int \frac{\mathfrak{P}' ds}{e}$ ,

$$(4) \quad \xi_1 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^3} \frac{a^2 - r^2}{a} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \eta_1 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^3} \frac{a^2 - r^2}{a} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \zeta_1 = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^3} \frac{a^2 - r^2}{a} \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Resta ora a determinare la funzione  $H$ : dalla (3) si deduce

$$4\pi a \mathfrak{P} = H + 2r \frac{dH}{dr},$$

e dall'espressione di  $\mathfrak{P}$  mediante le  $\xi, \eta, \zeta$

$$4\pi a \mathfrak{P} = - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^3} r \frac{dH}{dr} + 4\pi \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{T} + 2r \frac{d}{dr} \frac{r}{T} \right).$$

Coll'eguagliare fra loro queste due espressioni di  $4\pi a \mathfrak{P}$  si giunge all'equazione differenziale

$$kH + r \frac{dH}{dr} = 4\pi k \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{T} + 2r \frac{d}{dr} \frac{r}{T} \right) = 4\pi k \frac{dG}{dr},$$

dove  $k = \frac{\omega^2}{\Omega^2 + \omega^2}$ ,  $G = \frac{r}{T} + 2r \frac{d}{dr} \frac{r}{T}$ . Da essa per via d'integrazione si trae

$$H = C + 4\pi k r^{-k} \int r^{k-1} \frac{dG}{dr} dr$$

con  $C$  costante rispetto ad  $r$ . La costante  $C$  si determinerà colla condizione che sia

$$(H)_{r=0} = 4\pi \left( \frac{dG}{dr} \right)_{r=0}$$

Attesa la simmetria di  $\frac{dG}{dr}$  e di  $H$  rispetto ad  $r$  e ad  $r_1$  ( $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ ) si ha

$$\frac{dG}{dr} = \frac{dG_1}{dr_1},$$

$$H = C + 4\pi k r_1^{-k} \int r_1^{k-1} \frac{dG}{dr_1} dr_1.$$

Quindi facendo  $r = 0$  si ottiene

$$\left(\frac{dG}{dr}\right)_{r=0} = \frac{3}{a^2},$$

$$(H)_{r=0} = C + \frac{12\pi}{a^2} \left(1 - \left[\frac{\alpha}{r_1}\right]^k\right),$$

ove con  $\alpha$  si designi il limite inferiore dell'integrale che figura nell'espressione di  $H$ . Eguagliando il valore di  $(H)_{r=0}$  a quello di  $4\pi \left(\frac{dG}{dr}\right)_{r=0}$  segue subito dover essere

$$C = 0, \quad \alpha = 0,$$

e in conseguenza

$$H = 4\pi k r^{-k} \int_0^r r^{k-1} \frac{dG}{dr} dr = 4\pi k E.$$

Con questo le espressioni della dilatazione cubica  $\vartheta$  e degli spostamenti  $\xi, \eta, \zeta$  assumeranno la forma semplicissima

$$(5) \quad \vartheta = \frac{k}{a} \left( E + 2r \frac{dE}{dr} \right),$$

$$\xi = a \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{T} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{a^2 - r^2}{2a} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad \eta = a \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{T} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{a^2 - r^2}{2a} \frac{\partial E}{\partial y}$$

(6)

$$\zeta = a \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{T} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{a^2 - r^2}{2a} \frac{\partial E}{\partial z}.$$

Anche i doppi  $r_1, r_2, r_3$  delle componenti della rotazione sono suscettivi di una espressione molto semplice: invero dalla

$$\frac{r}{T} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a^2 x}{r^3} - x_1\right)^2 + \left(\frac{a^2 y}{r^3} - y_1\right)^2 + \left(\frac{a^2 z}{r^3} - z_1\right)^2}},$$

segue

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{r}{T} = - \frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{d\left(\frac{a^2 x}{r^3}\right)},$$

od anche

$$a \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{T} = - \frac{1}{ar} \frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{d\left(\frac{x}{r^3}\right)};$$

ma

$$\frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{d\left(\frac{x}{r^3}\right)} = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{T} - 2xr \frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{dr};$$

dunque

$$a \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{T} = - \frac{r}{a} \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{T} + \frac{2x}{a} \frac{d}{dr} \frac{r}{T} = \frac{xG}{ar} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \frac{r^2}{T},$$

e così pure

$$a \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{T} = \frac{yG}{ar} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y} \frac{r^2}{T}, \quad a \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{T} = \frac{zG}{ar} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \frac{r^2}{T}.$$

Ora sostituendo nelle (6) in luogo delle  $a \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{T}, \dots$ , i valori testè ottenuti e formando poi le espressioni

$$\tau_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \tau_2 = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \tau_3 = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

si avrà

$$(7) \quad \tau_1 = z \frac{\partial Q}{\partial y} - y \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \tau_2 = x \frac{\partial Q}{\partial z} - z \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \tau_3 = y \frac{\partial Q}{\partial x} - x \frac{\partial Q}{\partial y},$$

dove

$$aQ = \frac{G}{r} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} E.$$

2. Accennata con  $\varrho$  la densità della sfera, le forze  $L, M, N$  che agendo sulla superficie sarebbero capaci di produrre la deformazione definita dalle formule (5), (6) e (7) si ricaveranno dall'equazione

$$(8) \quad \frac{L}{\varrho} = 2\omega^2 \frac{d\xi}{dr} + (\Omega^2 - 2\omega^2) \frac{x}{r} + \omega^2 \frac{r_1 y - r_1 z}{r},$$

e dalle due che se ne deducono con permutazione circolare di lettere: ben inteso, che nel secondo membro bisognerà porre dappertutto  $r = a$ . Mediante alcune riduzioni si possono mettere le espressioni per  $L, M, N$  sotto una forma notevolmente semplice. Invero è evidente prima di tutto che per la simmetria di  $E$  rispetto ad  $r$  e ad  $r_1$  si ha

$$E = r_1^{-k} \int_0^{r_1} r_1^{k-1} \frac{d}{dr_1} \left( \frac{r_1}{T} + 2r_1 \frac{d}{dr_1} \frac{r_1}{T} \right) dr_1.$$

e che mutato sotto il vincolo integrale  $r_1$  in  $r_1\sigma$  ed assunta  $\sigma$  come variabile d'integrazione si ha ancora

$$E = \int_0^1 \sigma^{k-1} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma}{T_\sigma} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{\sigma}{T_\sigma} \right) d\sigma,$$

quando con  $T_\sigma$  si rappresenti ciò che diventa  $T$  dopo il cambiamento di  $r_1$  in  $r_1\sigma$ . Da questa espressione di  $E$  si trae

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \int_0^1 \sigma^{k-1} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma(a^2 x_1 \sigma - x r_1^2 \sigma^2)}{T_\sigma^3} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{\sigma(a^2 x_1 \sigma - x r_1^2 \sigma^2)}{T_\sigma^3} \right) d\sigma,$$

e per  $r = a$

$$\left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)_{r=a} = \frac{1}{a^3} \int_0^1 \sigma^{k-1} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma(a^2 x_1 \sigma - x r_1^2 \sigma^2)}{R_\sigma^3} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{\sigma(a^2 x_1 \sigma - x r_1^2 \sigma^2)}{R_\sigma^3} \right) d\sigma,$$

indicando con  $R_\sigma$  il risultato della sostituzione in  $R$  di  $r_1\sigma$  ad  $r_1$ . Ma si scorge senza difficoltà che

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{r=a} &= \frac{1}{a} \int_0^1 \sigma^{k-1} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma(x, \sigma-x)}{R_\sigma^3} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{\sigma(x, \sigma-x)}{R_\sigma^3} \right) d\sigma \\ &+ \frac{x}{a^3} \int_0^1 \sigma^{k-1} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma(a^2 - r_1^2 \sigma^2)}{R_\sigma^3} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{\sigma(a^2 - r_1^2 \sigma^2)}{R_\sigma^3} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

e in conseguenza, posto per compendio

$$(9) \quad E_1 = \frac{r_1^{k-1}}{a} \int_0^1 r_1^{k-1} \frac{d}{dr_1} \left( \frac{r_1}{R} + 2r_1 \frac{d}{dr_1} \frac{r_1}{R} \right) dr_1,$$

ossia

$$(9)_1 \quad E_1 = \frac{1}{a} \int_0^1 \sigma^{k-1} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\sigma}{R_\sigma} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{\sigma}{R_\sigma} \right) d\sigma,$$

si otterrà

$$(10) \quad \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{r=a} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{x}{a^3} \left( E_1 + 2r_1 \frac{dE_1}{dr_1} \right),$$

ove si tenga presente che

$$\frac{x, \sigma - x}{R_\sigma^3} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R_\sigma}, \quad \frac{a^2 - r_1^2 \sigma^2}{R_\sigma^3} = \frac{1}{R_\sigma} + 2r_1 \frac{d}{dr_1} \frac{1}{R_\sigma}.$$

Si osserverà in secondo luogo che

$$\left(\frac{d\xi}{dr}\right)_{r=a} = \left( \frac{x}{a^3} \frac{dG}{dr} - \frac{1}{a} \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x} \frac{r^2}{T} - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial E}{\partial x} \right)_{r=a},$$

$$\left(\frac{r_1 y - r_1^2 s}{r}\right)_{r=a} = \left[ \frac{1}{a^3} \left( a \frac{\partial G}{\partial x} - x \frac{dG}{dr} \right) - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{1}{a} \left( x \frac{dE}{dr} - a \frac{\partial E}{\partial x} \right) \right]_{r=a},$$

o sostituendo in luogo di  $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{r=a}$  il valore dato dalla (10) ed

in luogo di  $\frac{dG}{dr}$  l'espressione  $kE + r_1 \frac{dE}{dr_1}$  che le è uguale per la definizione stessa della funzione G,

$$\left(\frac{d\xi}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{1}{a} \left( \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x} \frac{r^2}{T} \right)_{r=a} - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial E_1}{\partial x} - \frac{x}{a^3} \left( \frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} E_1 + \frac{\Omega^2 - 3\omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} r_1 \frac{dE_1}{dr_1} \right)$$

(11)

$$\left(\frac{r_1 y - r_1^2 s}{r}\right)_{r=a} = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{r=a} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{x}{a^3} \left( \frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} E_1 - \frac{2\omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} r_1 \frac{dE_1}{dr_1} \right).$$

Mettendo nella (8) al posto di 9 il suo valore dato dalla (5) ed al posto di  $\frac{d\xi}{dr}$ ,  $\frac{r_3 y - r_2 z}{r}$  i loro valori dati dalle (11), si trova

$$(12) \quad \frac{L}{\epsilon} = \frac{\omega^2}{a} \left( \frac{\partial G}{\partial x} - 2 \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x} \frac{r^2}{T} \right)_{r=a} - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \omega^2 \frac{\partial E_a}{\partial x}.$$

Ma

$$\frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x} \frac{r^2}{T} = \frac{2x}{r} \frac{d}{dr} \frac{r}{T} + r \frac{\partial}{\partial x} \frac{d}{dr} \frac{r}{T},$$

e

$$\frac{\partial G}{\partial x} - 2 \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x} \frac{r^2}{T} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{r}{T} - \frac{2x}{r} \frac{d}{dr} \frac{r}{T},$$

che per  $r = a$  ci dà

$$(13) \quad \left( \frac{\partial G}{\partial x} - 2 \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x} \frac{r^2}{T} \right)_{r=a} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R}.$$

Se ora si pone

$$E_a^* = \frac{1}{a} \int_0^1 \sigma^{k-1} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{R\sigma} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{R\sigma} \right) d\sigma,$$

ne risulterà senz' altro

$$(14) \quad \frac{\partial E_a}{\partial x} = - \frac{\partial E_a^*}{\partial x_1},$$

e sostituendo nella (12) al posto di  $\left( \frac{\partial G}{\partial x} - 2 \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x} \frac{r^2}{T} \right)_{r=a}$ ,  $\frac{\partial E_a}{\partial x}$  le loro espressioni (13) e (14) si otterrà finalmente

$$\frac{L}{\epsilon} = - \frac{\omega^2}{a} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{R} - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} a E_a^* \right);$$

e nella medesima maniera

$$(15) \quad \frac{M}{\epsilon} = - \frac{\omega^2}{a} \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{1}{R} - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} a E_a^* \right), \quad \frac{N}{\epsilon} = - \frac{\omega^2}{a} \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{1}{R} - \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} a E_a^* \right).$$

3. Passo ora al caso generale di spostamenti  $u, v, w$  dei punti della superficie affatto qualunque, sempre nel supposto che non



sieno sollecitati da forze esterne gli elementi di massa. Designate con  $Lds, Mds, Nds$  le componenti delle forze, che si dovrebbero applicare ad ogni elemento  $ds$  della superficie in luogo degli spostamenti  $u, v, w$  per produrre nella sfera la medesima deformazione, dalla espressione della dilatazione cubica  $\Theta$  in un punto qualunque  $x_1, y_1, z_1$ ,

$$\begin{aligned}
 4\pi \Omega^2 \Theta = & \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\epsilon} \int_s \frac{Lds}{R} - 2\omega^2 \int_s u \frac{d}{dr} \frac{1}{R} ds \right) \\
 (16) \quad & + \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{1}{\epsilon} \int_s \frac{Mds}{R} - 2\omega^2 \int_s v \frac{d}{dr} \frac{1}{R} ds \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{1}{\epsilon} \int_s \frac{Nds}{R} - 2\omega^2 \int_s w \frac{d}{dr} \frac{1}{R} ds \right)
 \end{aligned}$$

si elimineranno le forze incognite  $L, M, N$  combinando questa equazione coll'altra

$$(17) \int_s (Lu + Mv + Nw) ds = \int_s \left( L \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R} + M \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} + N \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{R} \right) ds$$

somministrata dal noto teorema del Prof. Betti: si otterrà così facilmente

$$(16') \quad 4\pi \Omega^2 \Theta = \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1},$$

dove

$$aA = \omega^2 \int_s u P ds, \quad aB = \omega^2 \int_s v P ds, \quad aC = \omega^2 \int_s w P ds,$$

$$P = \frac{1}{R} + 2r_1 \frac{d}{dr_1} \frac{1}{R} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} aE_2^*,$$

tenuto conto che è per qualsivoglia valore di  $r$  ed in particolare per  $r = a$

$$\frac{1}{R} + 2r \frac{d}{dr} \frac{1}{R} = - \left( \frac{1}{R} + 2r_1 \frac{d}{dr_1} \frac{1}{R} \right).$$

Se si pone

$$U = \int \frac{u ds}{R}, \quad V = \int \frac{v ds}{R}, \quad W = \int \frac{w ds}{R},$$

$$U_1 = U + 2r_1 \frac{dU}{dr_1}, \quad V_1 = V + 2r_1 \frac{dV}{dr_1}, \quad W_1 = W + 2r_1 \frac{dW}{dr_1}$$

si riesce per A, B, C alle forme più espressive

$$aA = \omega^2 \left( U_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{1}{r_1^{k-1}} \int_0^{r_1} r_1^{k-1} \frac{dU_1}{dr_1} dr_1 \right),$$

$$aB = \omega^2 \left( V_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{1}{r_1^{k-1}} \int_0^{r_1} r_1^{k-1} \frac{dV_1}{dr_1} dr_1 \right),$$

$$aC = \omega^2 \left( W_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2 + \omega^2} \frac{1}{r_1^{k-1}} \int_0^{r_1} r_1^{k-1} \frac{dW_1}{dr_1} dr_1 \right).$$

4. Una volta conosciuta la funzione  $\Theta$  seguendo il medesimo procedimento del n.° 1 si deducono per gli spostamenti  $u, v, w$  del punto  $x_1, y_1, z_1$  le espressioni

$$(18) \quad \begin{aligned} u &= \frac{a^2 - r_1^2}{4\pi a} \int \frac{u' ds}{e_1^3} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^2} \frac{a^2 - r_1^2}{a} \frac{d}{dx_1} \int \frac{\Theta' ds}{e_1}, \\ v &= \frac{a^2 - r_1^2}{4\pi a} \int \frac{v' ds}{e_1^3} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^2} \frac{a^2 - r_1^2}{a} \frac{d}{dy_1} \int \frac{\Theta' ds}{e_1}, \\ w &= \frac{a^2 - r_1^2}{4\pi a} \int \frac{w' ds}{e_1^3} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{8\pi\omega^2} \frac{a^2 - r_1^2}{a} \frac{d}{dz_1} \int \frac{\Theta' ds}{e_1}, \end{aligned}$$

nelle quali  $e_1^2 = (x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2 + (z' - z_1)^2$  ed  $u', v', w', \Theta'$  sono i valori di  $u, v, w, \Theta$  nel punto  $x', y', z'$ . Queste espressioni si possono ancora semplificare. Difatti se si pone

$$\Phi = \int_s \frac{\Theta' ds}{e_1},$$

si trae

$$\Phi + 2r_1 \frac{d\Phi}{dr_1} = (a^2 - r_1^2) \int_s \frac{\Theta' ds}{e_1^3} - 4\pi a \Theta,$$

da cui, aggiungendo la condizione che sia

$$(\Phi)_{r_1=0} = 4\pi a (\Theta)_{r_1=0},$$

si deduce

$$\Phi = \frac{2\pi a}{V r_1} \int_0^{r_1} \frac{\Theta dr_1}{V r_1}.$$

Sostituendo questo valore di  $\Phi$  nelle (18) si ha finalmente

$$u = \frac{a^2 - r_1^2}{4\pi a} \int_s \frac{u' ds}{e_1^3} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2} (a^2 - r_1^2) \frac{d}{dx_1} \frac{1}{V r_1} \int_0^{r_1} \frac{\Theta dr_1}{V r_1},$$

$$(18') \quad v = \frac{a^2 - r_1^2}{4\pi a} \int_s \frac{v' ds}{e_1^3} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2} (a^2 - r_1^2) \frac{d}{dy_1} \frac{1}{V r_1} \int_0^{r_1} \frac{\Theta dr_1}{V r_1},$$

$$w = \frac{a^2 - r_1^2}{4\pi a} \int_s \frac{w' ds}{e_1^3} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2} (a^2 - r_1^2) \frac{d}{dz_1} \frac{1}{V r_1} \int_0^{r_1} \frac{\Theta dr_1}{V r_1}.$$

La doppia integrazione rispetto ad  $r_1$  che figurerà in  $\int_0^{r_1} \frac{\Theta dr_1}{V r_1}$  do-

po la sostituzione del valore di  $\Theta$  cavato dalla (16'), si può ridurre ad una integrazione semplice, ma io sorvolerò sopra queste minuzie.

5. Nel caso in cui ogni elemento di volume  $dS$  è sollecitato da forze, le cui componenti secondo gli assi sieno  $\epsilon X dS$ ,  $\epsilon Y dS$ ,  $\epsilon Z dS$ , bisognerà aggiungere al secondo membro della (16)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_S \frac{X dS}{R} + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_S \frac{Y dS}{R} + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_S \frac{Z dS}{R}$$

ed al secondo membro della (17)

$$\int_S (X\xi + Y\eta + Z\zeta) \epsilon dS ;$$

indi converrà fare

$$\Theta = \Theta_{(1)} + \Theta_{(2)}$$

con

$$4\pi^2 \Theta_{(1)} = \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1} - \int_S (X\xi + Y\eta + Z\zeta) dS ,$$

$$4\pi^2 \Theta_{(2)} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_S \frac{X dS}{R} + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_S \frac{Y dS}{R} + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_S \frac{Z dS}{R} ;$$

la funzione  $\Theta_{(1)}$  soddisfa nell'interno della sfera all'equazione  $\Delta^2 = 0$ , ciò che non avverrà in generale per la funzione  $\Theta_{(2)}$ . Converrà del pari scomporre gli spostamenti  $u, v, w$  in due parti cioè a dire converrà mettere

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

assoggettando le  $u_1, v_1, w_1$  alle condizioni: 1.<sup>a</sup> di soddisfare nello spazio interno alla sfera alle equazioni

$$\Delta^2 u_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \Theta_{(1)}}{\partial x_1} = 0, \quad \Delta^2 v_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \Theta_{(1)}}{\partial y_1} = 0, \quad \Delta^2 w_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \Theta_{(1)}}{\partial z_1} = 0;$$

2.<sup>a</sup> di prendere in superficie i valori dati per  $u, v, w$ . Le funzioni  $u_1, v_1, w_1$  si otterranno dalle (18') sostituendo  $\Theta_{(1)}$  in luogo di  $\Theta$ . Quanto alle funzioni  $u_2, v_2, w_2$  verranno determinate colle se-

guenti condizioni: 1.<sup>a</sup> di soddisfare nell'interno della sfera alle equazioni

$$\Delta^2 u_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \Theta_{(1)}}{\partial x_1} + \frac{X}{\omega^2} = 0, \quad \Delta^2 v_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \Theta_{(1)}}{\partial y_1} + \frac{Y}{\omega^2} = 0,$$

$$\Delta^2 w_1 + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2} \frac{\partial \Theta_{(1)}}{\partial z_1} + \frac{Z}{\omega^2} = 0;$$

2.<sup>a</sup> di annullarsi in superficie; e ciò si ottiene mediante formole conosciute.

6. Un procedimento simile a quello seguito nei §§ precedenti vale anche per il calcolo della deformazione di un corpo indefinito limitato a distanza finita da una superficie sferica quando si suppongano dati gli spostamenti sulla superficie della sfera e nulli gli spostamenti dei punti situati a distanza infinita. Nelle formole trovate bisognerebbe mutare  $a^2 - r^2$ ,  $a^2 - r_1^2$  rispettivamente in  $r^2 - a^2$ ,  $r_1^2 - a^2$  ed ai limiti 0,  $r$ ; 0,  $r_1$  degli integrali sostituire i limiti  $r, \infty$ ;  $r_1, \infty$ . Tra le funzioni  $\mathfrak{D}$  ed  $H$  si avrebbe la relazione

$$4 \pi a \mathfrak{D} = - \left( H + 2r \frac{dH}{dr} \right)$$

e per la funzione  $H$  la espressione

$$H = 4 \pi k r^{-k} \int_r^\infty r^{k-1} \frac{dG}{dr} dr.$$

Quanto agli altri lievi cambiamenti da introdurre il lettore li vedrà da sè senza bisogno di spiegazioni più minute.



SULLA TENACITÀ E SULLA PLASTICITÀ DEL FERRO  
A DIVERSE TEMPERATURE; MEMORIA DI M. ASCOLI <sup>1)</sup>.

10. *Risultati delle esperienze.* — Sarebbe troppo lungo riportare tutti i dati relativi alle singole esperienze fatte. Queste sono in numero di 14 per la serie B, 25 per la CD, 31 per la E, 46 per la F, 37 per la H, 36 per la I e 48 per la L. La tenacità  $T$ , per ciascuna esperienza, fu calcolata dividendo il peso di rottura in chilogrammi per la sezione della riga in millimetri quadrati. Segnando i punti che hanno la temperatura per ascisse e la tenacità  $T$  per ordinate si manifesta per tutte le sette serie evidente l'andamento del fenomeno e si può con sufficiente sicurezza tracciare una linea che per le serie B, CD, E e F si scosti pochissimo da tutti i punti. Per le altre serie, per le ragioni sopra dette, questo tracciamento è molto più incerto ma l'andamento della linea non è men manifesto.

Minor regolarità presentano i punti che abbiano per ordinate il rapporto  $\mu$  delle sezioni, tuttavia anche qui non dubbio si presenta l'andamento generale, specialmente per le citate serie. Più irregolari si presentano gli allungamenti, come è naturale, per l'influenza dei citati allungamenti parziali che hanno luogo in diversi punti della riga; ma anche qui l'irregolarità non è tale che non sia manifesto l'andamento complessivo della variazione.

Onde eliminare con qualche criterio le cause perturbatrici accidentali ho proceduto come segue. Ho riunito in gruppi tutte le esperienze fatte a temperature che non differiscano di più che 20°, ed ho preso la media tanto delle temperature come della tenacità e dei rapporti delle lunghezze e delle sezioni ( $\rho$  e  $\mu$ ). Per esempio nella serie E ho fatto un primo gruppo delle esperienze 1, 2, 3, 4, un secondo delle 3, 4, 5, 6, 7, un terzo delle 5, 6, 7, 8 e così di seguito. Ho così ottenuto i valori raccolti nella tabella seguente, che potremmo chiamare valori perequati.

1) *Continuazione e fine.* Vedi pag. 8.

# TABELLA II.

SERIE B					SERIE C-D					SERIE E					SERIE F				
t	T	p	μ	t	T	p	μ	t	T	p	μ	t	T	p	μ	t	T	p	μ
9,4	34,4	1,169	1,206	9,5	38,1	1,095	1,170	9,5	39,3	1,163	1,200	-20,7	38,0	...	...	...	...	...	...
31,6	34,6	1,135	1,190	31,2	38,1	1,118	1,186	27,5	39,1	1,141	1,218	+10,8	37,4	1,140	1,208	...	...	1,140	1,208
62,6	38,2	1,112	1,203	60,3	36,5	1,118	1,165	48,7	37,2	1,117	1,160	21,9	38,0	1,128	1,208	...	...	1,128	1,208
81,5	33,8	1,086	1,186	86,5	37,2	1,092	1,127	60,5	37,4	1,119	1,167	31,3	37,7	1,125	2,184	...	...	1,125	2,184
145,0	38,3	1,055	1,075	116,9	38,0	1,068	1,081	73,9	37,9	1,123	1,166	44,9	36,7	1,134	1,162	...	...	1,134	1,162
162,4	38,7	1,060	1,082	128,8	40,1	1,062	1,092	95,6	38,4	1,071	1,089	56,7	36,1	1,125	1,166	...	...	1,125	1,166
194,2	43,8	...	1,072	144,2	42,5	1,074	1,085	124,8	42,0	1,092	1,109	72,9	34,0	1,123	1,167	...	...	1,123	1,167
224,8	43,6	...	...	189,6	45,4	1,093	1,109	139,7	41,1	1,064	1,069	94,9	36,6	1,075	1,083	...	...	1,075	1,083
264,5	44,6	...	1,169	204,7	46,8	...	1,104	159,3	43,6	1,075	1,083	115,6	38,3	1,074	2,094	...	...	1,074	2,094
287,2	42,9	...	1,215	220,8	48,5	...	1,118	205,1	50,2	1,122	1,111	142,6	40,0	1,073	1,082	...	...	1,073	1,082
				232,6	47,7	...	1,113	226,5	51,9	1,146	1,165	160,4	44,4	1,096	1,112	...	...	1,096	1,112
				266,5	46,6	...	1,116	243,3	51,7	1,140	1,206	172,6	44,7	1,101	1,100	...	...	1,101	1,100
				290,9	47,3	...	1,200	256,5	51,2	1,165	1,196	203,6	45,8	...	1,117	...	...	...	1,117
								268,8	50,9	1,165	1,200	226,6	46,7	...	1,105	...	...	...	1,105
								286,5	50,3	...	1,190	264,1	47,2	1,148	1,167	...	...	1,148	1,167
												281,9	48,2	...	1,163	...	...	...	1,163
												300,4	46,0	...	1,208	...	...	...	1,208

## TABELLA II. (Seguito)

SERIE H				SERIE I				SERIE L			
$t$	T	$\rho$	$\mu$	$t$	T	$\rho$	$\mu$	$t$	T	$\rho$	$\mu$
12,2	28,8	1,109	1,139	6,2	31,7	1,062	1,086	11,2	84,4	1,037	1,092
29,6	30,3	1,100	1,117	85,0	31,0	1,071	1,108	22,8	84,7	1,036	1,085
44,9	29,3	1,091	1,105	60,4	28,5	1,080	1,093	85,0	33,8	1,030	1,071
59,2	26,9	1,092	1,120	71,7	26,8	1,044	1,068	63,4	83,4	1,079	1,072
67,2	26,1	1,090	1,115	110,0	29,6	1,038	1,035	72,9	31,6	1,040	1,131
82,8	26,7	1,078	1,099	140,3	33,1	1,047	1,024	105,8	83,6	1,032	1,069
103,1	29,1	1,053	1,071	183,6	33,9	1,048	1,048	123,3	84,2	1,034	1,024
114,6	29,8	1,057	1,066	195,1	34,9	..	1,065	142,5	85,5	1,035	1,085
142,2	32,1	1,067	1,041	210,2	36,3	1,039	1,041	179,0	87,7	1,052	1,037
172,3	33,6	1,086	1,060	224,9	37,4	1,047	1,041	200,4	89,0	..	1,062
199,4	36,0	..	1,094	244,3	38,3	..	1,022	211,7	89,7	1,037	1,051
211,0	35,6	..	1,103	262,6	88,3	1,036	1,030	233,1	88,3	..	1,100
228,1	34,8	..	1,093	272,0	89,2	..	1,059	244,4	83,8	..	1,087
267,0	34,8	..	1,103	298,8	89,1	..	1,097	262,1	41,8	1,055	1,070
291,0	34,6	..	1,078	..	..	..	..	274,0	40,1	..	1,085
303,1	34,0	..	1,065	..	..	..	..	287,7	88,0	..	1,078
								302,9	41,7	..	1,081



Coi valori qui raccolti sono tracciate le curve delle tavole I e II. Nelle ascisse un mm. corrisponde a  $5^{\circ}$ , nelle ordinate un cent. corrisponde a 2 km. per mm. q., nelle curve della tenacità, ed al valore 0,040 in quelle costruite coi valori di  $\rho$  e di  $\mu$ . Ho congiunto con rette punteggiate i punti successivi e poi ho tracciato le curve continue sull'andamento delle quali rimane pochissimo dubbio; anche per le serie H, I, L l'andamento si manifesta in modo evidente; grandi irregolarità non si hanno che nell'ultima parte della L. Il minimo ed il massimo risultano perfettamente definiti in tutti i casi; restava solo un dubbio in vicinanza delle più basse temperature dove la curva si inflette in modo da far sospettare l'esistenza di un altro massimo. Per chiarire questo punto ho fatto su alcune righe della serie F delle esperienze di confronto alla temperatura dell'ambiente di  $12^{\circ},1$  ed a quella di  $-20^{\circ},7$  ottenuta mediante una miscela frigorifica di ghiaccio e sale collocata nel bagno stesso che aveva servito pel riscaldamento. Ho rotto 4 righe alla temperatura dell'ambiente e altre 6 a temperatura compresa tra  $-20^{\circ}$  e  $-21^{\circ}$ , e trovai costantemente la tenacità a quest'ultima temperatura maggiore che all'altra: il rapporto tra le due risultò 1,035. Così fu tracciato il primo punto della curva F che dimostra non esistere il massimo sospettato.

Quanto alle curve  $\mu$ , malgrado la men regolare distribuzione dei punti, si possono tracciare con sufficiente sicurezza per le prime 4 serie e dimostrano tutte eguale andamento. Le curve  $\rho$  tendono, come è naturale, a correr parallele alle  $\mu$ , ma son meno regolari. Le ho tracciate per mostrare come nello studio di questi fenomeni convenga considerare le variazioni delle sezioni piuttosto che quelle delle lunghezze.

11. *Conclusione.* — Da queste esperienze sono confermati i risultati del prof. Pisati in quanto all'esistenza di una minima e di una massima tenacità; ma in tre punti essi vengono modificati.

1.° Il passaggio dal massimo al minimo, avviene rapidamente ma non bruscamente come era risultato in tutte le esperienze del Pisati. (V. fig. 10 della tav. III).

2.° La temperatura di minima tenacità non dipende dalla sezione della riga. Essa per le diverse serie, dedotta dalle curve è

Serie	Spessore	Temp. di minima tenacità
B	4,15	68°
C-D	3,05	70
E	2,70	60
F	2,09	72
H	1,06	70
I	0,76	75
L	0,61	75
		— —
		Media 70°

3.° Non si presenta altro massimo fuorchè quello principale ad una temperatura eguale per tutte le serie. Per assegnarne il valore tengo conto solo delle prime quattro, ed ottengo

Serie	B	240°
	C-D	238
	E	230
	F	235
		— —
		Media 236°

Le curve degli allungamenti hanno pure eguale andamento in tutti i casi; hanno tutte una forma prossima alla parabolica con un minimo notevolissimo e molto prossimo ai 150°.

Visto il comportamento perfettamente eguale in tutti i casi per riassumere i risultati ottenuti, ho dedotto dalle 4 curve della Tav. I i seguenti valori della tenacità e pel rapporto  $\mu$  per temperature di 25° in 25°. Nell' ultima colonna della seguente tabella sono segnati i valori medii.

TABELLA III.

$t$	Tenacità				$T_m$
	B	C-D	E	F	
0°	35,0	38,5	39,8	38,2	37,9
25	34,5	38,0	38,7	37,4	37,1
50	32,6	36,8	37,2	36,1	35,7
75	33,2	36,4	36,6	33,8	35,0
100	34,7	37,5	39,0	36,5	36,9
125	36,4	39,8	40,9	39,4	39,1
150	38,2	42,1	43,2	42,0	41,4
175	40,2	44,5	46,2	44,2	43,8
200	42,6	46,8	50,0	46,0	46,3
225	44,7	48,4	51,8	47,1	48,0
250	44,8	48,4	51,5	47,1	47,9
275	43,9	47,1	50,7	46,6	47,1
300	42,6	45,8	49,9	45,0	45,8

TABELLA IV.

$t$	Rapporto delle sezioni				$\mu_m$
	B	C-D	E	F	
0°	1,240	1,208	1,236	1,230	1,228
25	210	181	200	186	194
50	180	155	164	146	161
75	156	130	130	124	135
100	130	108	102	102	110
125	100	88	82	89	90
150	80	82	72	84	79
175	76	87	87	88	84
200	91	97	112	102	100
225	115	112	136	122	121
250	144	133	162	144	146
275	176	160	190	170	174
300	208	189	220	203	205

Colle medie riportate nell'ultima colonna di queste due tabelle si sono disegnate le figure 7 ed 8 della Tav. III che riassume i risultati cui siamo giunti. Nel tracciare la prima, si è tenuto presente che le temperature del minimo e del massimo sono  $70^{\circ}$  e  $236^{\circ}$  cui corrispondono i valori 35,0 e 48,2. Nel tracciare la seconda si ricordò che a  $156^{\circ}$  (media tra 170, 155, 150, 150) si ha un minimo valore che risulta in media di 1,078 (media di 1,076, 1,081, 1,072, 1,082).

12. Moltiplicando  $T_m$  per  $\mu_m$  si ottiene il valore della tenacità riferito alla sezione finale invece che alla iniziale, se quest'ultimo è quello che generalmente interessa alla pratica, il primo si deve ritenere come la vera misura della coesione del ferro nel momento della rottura. Si ottengono così i seguenti valori.

TABELLA V.

$t$	T	$t$	T	$t$	T
$0^{\circ}$	46,5				
25	44,3	$125^{\circ}$	42,6	$225^{\circ}$	53,8
50	41,4	150	44,7	250	54,9
75	39,7	175	47,5	275	55,3
100	41,0	200	50,9	300	55,2

Con questi valori ho costruito la figura 9 della Tav. III. L'andamento di questa nuova linea, che potremmo chiamare linea della coesione, non è molto diverso da quello della linea della tenacità; solo il minimo è molto esagerato ed il massimo è spostato da  $236^{\circ}$  a  $280$ , e mentre nella curva 7 a  $112^{\circ}$  l'ordinata raggiunge lo stesso valore che a  $0^{\circ}$ , nella 9 non lo raggiunge che a  $167^{\circ}$ . Si deve a questo proposito osservare che le forze di coesione così misurate non possono essere identiche a quelle del ferro che non abbia subito l'energica trazione che precede la rottura.

13. Quanto al valore assoluto della tenacità nelle diverse serie venne trovato molto differente, ma il confronto dei valori

determinati non lascia scorgere alcuna relazione colla sezione delle righe o collo spessore della lamiera. Solo per i piccoli spessori pare la tenacità tenda ad acquistare valori più piccoli. A 0° abbiamo i seguenti valori

Serie	Spessore	Tenacità a 0°
B	4 <sup>mm</sup> ,15	35,0
C-D	3,05	38,5
E	2,70	39,8
F	2,09	38,2
H	1,06	30,5
I	0,76	32,0
L	0,61	34,8

14. I-principali risultati di questa ricerca, oltre alle osservazioni ricordate al § 9, si posson ritenere riassunti dalla Tabella III e dalla curva 7 della Tav. III. A basse temperature la tenacità decresce regolarmente e continuamente fino a raggiungere un minimo spiccatissimo presso i 70°; indi riprende a crescere rapidamente, ma senza sbalzi, fino ai 236° dove raggiunge un massimo dopo il quale ricomincia una regolare diminuzione. Il valor minimo differisce dell' 8,3 % da quello a 0°, il massimo supera il minimo di 37,8 %.

Quanto alla sezione di rottura rispetto alla primitiva si ha una diminuzione fino ai 155° seguita da un graduale aumento. Lo stesso probabilmente si può ripetere per gli allungamenti.

## PARTE II. — Plasticità.

15. Per esaminare con qualche rigore le variazioni subite dalla plasticità occorre non solo dare di questa proprietà fisica una esatta definizione ma anche trovar modo di misurarla ossia di esprimerla con numeri. Gli autori che considerarono questi fenomeni non sono abbastanza d'accordo, su tali definizioni e spesso non distinguono abbastanza chiaramente la proprietà in questione da altre analoghe. Alcuni, ad esempio, parlano promi-

scuamente della plasticità e della viscosità; questa ha stretta relazione colla elasticità di seconda specie anzi in molti casi può considerarsi come la sua misura; ed ha pure relazione colla plasticità quando si consideri in essa l'influenza che ha la durata dello sforzo cui sono dovute le deformazioni. Altri, come di proprietà opposta alla plasticità, parlano della *durezza* <sup>1)</sup> mentre i più le contrappongono la *fragilità*.

Il sig. Brillouin, in una recente memoria <sup>2)</sup>, definisce un corpo plastico come un corpo in cui le forze elastiche sono alterate in modo che gli scorrimenti senza variazione di densità sono instabili; mentre fragile sarebbe quel corpo in cui sono instabili le variazioni di densità. Per instabile si intende qui una variazione che, una volta avvenuta, tende ad esagerarsi; la variazione instabile di densità conduce all'annullamento di questa in un punto, cioè alla rottura. A seconda di tale concetto taluni corpi sarebbero plastici di loro natura, in essi l'alterazione citata nelle forze elastiche sarebbe provocata dalla più piccola azione meccanica, per esempio dal loro stesso peso. Altri invece diverrebbero plastici solo quando fossero sottoposti a sforzi capaci di provocare quelle alterazioni permanenti.

La definizione del Brillouin, presa in questo senso, si adatta bene anche al caso nostro, ma essa è piuttosto qualitativa che quantitativa; inoltre se si presta come fondamento ad una teoria matematica, difficilmente si adatterebbe allo studio sperimentale, giacchè, nei casi ordinarii, nei fenomeni si manifestano simultanee le deformazioni permanenti o scorrimenti e le variazioni di densità.

Ultimamente il sig. Auerbach ha pubblicato uno studio interessantissimo <sup>3)</sup> nel quale appunto si occupa di stabilire della plasticità e delle proprietà congeneri un concetto rigoroso e una definizione quantitativa. Egli propone tre modi per esprimere numericamente il fenomeno. Sono i seguenti:

1.º *Il modulo di plasticità* è l'eccesso della tenacità sul

1) Carns — Wilson. *On the Behaviour of Steel under mechanical Strees*. *Phil. Mag.* vol. 29. 1890, p. 200.

2) *Principes généraux d'une théorie élastique de la plasticité des corps solides*. *Ann. sc. de l'éc. norm. sup.* 1890, p. 745.

3) F. Auerbach. *Plasticität und sprodigkeit*. *Wied. ann.* 1892, pag. 277.

limite di elasticità:

$$P = T - L,$$

un corpo sarebbe infinitamente plastico solo nel caso di  $T = \infty$ ; per  $T = L$  il modulo sarebbe nullo, cioè il corpo sarebbe assolutamente fragile.

2.° *Il coefficiente di plasticità* è l'eccesso tra la tenacità ed il limite di elasticità espresso in frazione della tenacità stessa

$$n = \frac{T - L}{T}$$

3.° *La plasticità pratica* è la grandezza della deformazione che un corpo subisce dal limite di elasticità a quello di tenacità. Si ottiene moltiplicando  $P$  per il modulo di elasticità tra i medesimi limiti.

Non v'ha dubbio che ciascuno di questi tre punti di vista può condurre alla misura di una quantità definita rigorosamente, ma talune considerazioni di indole generale, e meglio l'esame di taluni dei fenomeni che sono oggetto dell'attuale studio, mostra che nessuno è atto a rappresentare in modo completo i risultati dell'osservazione ed il concetto comune di corpo plastico. Infatti il concetto di plasticità, a mio credere, non è determinato da un solo elemento, cioè dalla sola variazione dello sforzo o dalla sola variazione permanente della forma, ma da ambedue simultaneamente, giacchè si chiamerà tanto più plastica una sostanza quanto più piccolo sarà lo sforzo necessario a produrre una determinata deformazione permanente, oppure quanto più grande è la deformazione permanente prodotta da un determinato sforzo. Con questa definizione si ha il vantaggio che la grandezza della plasticità si può immaginare variabile da 0 all' $\infty$ ; nel primo caso saremo se per produrre una deformazione permanente occorre uno sforzo infinitamente grande; prima di raggiungere questo il corpo si spezza (corpo fragile): nel secondo, se uno sforzo infinitamente piccolo basta a produrre una deformazione permanente finita; i fluidi, p. es., sarebbero infinitamente plastici. La misura della plasticità sarebbe dunque il rap-

*porto tra la deformazione permanente e lo sforzo necessario a produrla.*

16. Dalla considerazione dei fenomeni provocati nel ferro dalla trazione risulta evidente l'insufficienza delle definizioni dell'Auerbach. Per chiarezza ricorriamo alla rappresentazione grafica prendendo per ascisse gli allungamenti permanenti e per ordinate le corrispondenti tensioni. Nelle mie esperienze sulla tenacità, per un gran numero delle righe provate, ottenevo questi dati facendo numerare i giri della ruota della macchina e notando a ogni dieci giri l'indicazione del manometro; ad ogni dieci giri corrisponde un allungamento di mm. 3,12. Nei diagrammi riportati nella tavola III si sono presi per ascisse i numeri di giri della ruota, rappresentandone 5 con un millimetro, per ordinate le indicazioni del manometro rappresentando con un millimetro 20 Kg., senza fare le riduzioni che, pel grande numero di osservazioni fatte, sarebbero state laboriosissime; anche senza di esse le cose appariscono chiaramente; le riduzioni verranno fatte ai risultati finali. La forma della linea è affatto analoga in tutti i casi studiati, molto più numerosi di quelli riportati nella tav. III e s'accorda con quella notata da altri sperimentatori pel ferro e l'acciaio (V. Carus-Wilson l. c.). Si ha dapprima un rapidissimo incremento di tensione rappresentabile con una retta la cui inclinazione sull'asse delle ascisse (aumento di trazione corrispondente all'unità di allungamento) rappresenta il *modulo di elasticità*. La linea ascendente a un tratto si ferma, in corrispondenza del *limite di elasticità*. Il punto di fermata, che ci servirà poi alla misura di questo limite, ci dimostra come generalmente ben netta sia la separazione tra lo stato di elasticità completa e quello delle deformazioni permanenti. Al punto di fermata segue un tratto in cui la tensione varia poco ed irregolarmente, anzi per lo più in principio diminuisce; il Carus Wilson lo sostituisce con un tratto rettilineo parallelo all'asse delle ascisse e lo si può fare abbastanza approssimativamente anche nelle nostre linee. Segue poi un tratto che sale lentamente e regolarmente fino alla rottura volgendo una convessità più o meno sentita verso la regione delle ordinate positive.

Ora, ricercando, come nelle esperienze di Carus-Wilson, la



influenza dell'incrudimento, o, come nelle mie, quella della temperatura si trova che quest'ultimo tratto ha per la diversa temperatura o per la diversa temperatura inclinazioni molto diverse. Il V. Carus-Wilson prende la tangente dell'angolo che la tangente alla curva nel punto iniziale fa coll'asse delle ascisse come misura della *durezza* e trova che questa diversa inclinazione è accompagnata da una diversa lunghezza del tratto rettilineo; secondo la definizione che ho dato sopra, io prenderò invece il valore della cotangente di quest'angolo come misura della *plasticità*. Ora, anche astrazione fatta da tal modo di misura, appare evidente che, quanto più la curva corre distesa cioè piegata verso l'asse delle ascisse, tanto più plastico è il corpo; mentre se essa si raddrizza in modo da avvicinarsi all'asse delle ordinate, quasi prolungamento della linea di perfetta elasticità, si tende allo stato di corpo fragile in cui occorre un grandissimo sforzo per avere una piccola deformazione permanente. Per esempio le due linee oLA oLB (tav. III, fig. 11) che hanno un andamento tanto differente, darebbero una egual plasticità a seconda delle 2 prime definizioni dell'Auerbach; la terza invece darebbe una plasticità maggiore per la OLB. Se invece la seconda linea finisse in B', la terza definizione darebbe plasticità eguali; la prima darebbe al corpo C la plasticità maggiore e la seconda potrebbe dare a seconda dei valori dell'ordinata di B' valori maggiori eguali o minori.

È dunque chiaro, e meglio si vedrà poi, che nessuna delle definizioni dell'Auerbach poteva servire al mio caso. Perciò, in quanto segue, la plasticità sarà misurata dal rapporto tra l'allungamento e lo sforzo che lo produce cioè tra la variazione dell'ascissa e quella dell'ordinata, o dalla tangente dell'angolo che la curva fa coll'asse delle ordinate.

17. Da uno sguardo ai diagrammi della tavola, la diminuzione della plasticità del ferro al crescer della temperatura fino ai limiti raggiunti risulta evidente, purchè si parta dal concetto ora stabilito.

A ciascuna temperatura però la plasticità non è costante; ma all'aumentare della trazione aumenta, e, specialmente a temperature basse, prima della rottura diventa grandissima, ciò che si accorderebbe colla fluidità che, come è noto, presentano i

corpi solidi sottoposti a grandi sforzi. A tali sforzi sarebbero dovute quelle alterazioni dello stato elastico che, secondo la definizione del Brillouin, determinano la plasticità. Per la riduzione dei valori che si deducono dai diagrammi, raccolgo qui (Tab. I) i dati necessarii relativi alle righe delle serie E ed F cui i diagrammi si riferiscono;  $n$  è il numero d'ordine della riga (V. Tabella I della I parte),  $t$  la temperatura a cui fu eseguita l'esperienza,  $S$  la sezione iniziale,  $\mu = \frac{S}{S'}$  il rapporto tra la iniziale e la finale,  $\epsilon$  il coefficiente pel quale vanno moltiplicate le indicazioni del manometro per essere ridotte in chilogrammi. Nella serie F, essendosi eseguite molte esperienze a temperature vicine, si presero in tutti i calcoli che seguono le medie dei valori che vi si riferiscono.

TABELLA I.

$n$	$t$	$S$	$\mu = \frac{S}{S'}$	$\epsilon$
-----	-----	-----	----------------------	------------

*Serie E.*

36	37°,2	30,1	1,179	1,064
29	56,7	31,3	1,139	1,059
30	76,2	32,2	1,153	1,046
40	97,7	31,5	1,073	1,056
34	131,2	32,4	1,066	1,022
15	163,2	34,5	1,066	1,009

TABELLA I. (seguito).

$n$	$t$	$S$	$\rho = \frac{S}{S'}$	$\epsilon$
<i>Serie F.</i>				
48	— 21° 1	25,9	1,176	1,063
35	— 20, 9	24,5	1,250	1,063
43	— 20, 4	25,2	1,213	1,063
44	— 19, 9	25,8	1,200	1,063
75	+ 7, 1	23,4	1,198	1,028
32	8, 2	25,8	1,142	1,055
62	8, 5	23,5	1,214	1,064
33	11, 7	25,1	1,239	1,063
73	19, 2	25,3	1,141	1,083
38	22, 9	25,4	1,223	1,083
30	35, 4	25,6	1,157	1,035
37	35, 4	25,1	1,140	1,033
80	53, 7	24,3	1,202	1,085
20	72, 7	26,6	1,083	1,028
58	96, 6	24,5	1,093	1,085
60	114, 2	24,9	1,100	1,028
51	117, 2	23,4	1,123	1,028
77	139, 2	23,2	1,059	1,050
31	150, 8	25,3	1,135	1,034
18	176, 2	26,4	1,088	1,113

Nella Tabella II sono raccolti i valori della plasticità  $\pi$  sotto diverse pressioni  $P$  per 3 righe di ciascuna delle serie E ed F, come si deducono immediatamente dai diagrammi.  $L$  è la tensione che corrisponde al limite di elasticità. L'andamento del fenomeno risulta abbastanza chiaro anche senza le riduzioni che si possono del resto eseguire facilmente coi dati della Tabella I.

TABELLA II.

*Serie E.*

$n = 36$ $t=37^{\circ}2$ L=785		$n = 30$ $t=76^{\circ}2$ L=840		$n = 34$ $t=131^{\circ}0$ L=820	
P	$\pi$	P	$\pi$	P	$\pi$
850	1,29	950	1,05	900	0,40
900	1,67	1000	1,33	1000	0,44
950	2,25	1100	1,67	1100	0,71
1000	3,33	1150	2,22	1200	0,91
1050	6,66	1200	2,86	1300	1,43
1060	(rottura)			1400	2,00
				1450	2,50
				(rottura)	

*Serie F.*

$n = 43$ $t=-20^{\circ}4$ L=760		$n = 20$ $t=72^{\circ}7$ L=640		$n = 18$ $t=176^{\circ}2$ L=600	
P	$\pi$	P	$\pi$	P	$\pi$
800	2,86	700	1,67	700	0,77
850	4,00	750	2,00	800	1,18
900	9,10	800	3,12	900	1,82
935	16,67	850	3,57	1000	3,33
(rottura)				1080	6,67
				(rottura)	

Nel tratto che segue immediatamente il limite di elasticità e che si può sostituire approssimativamente con un segmento rettilineo parallelo all'asse delle ascisse la plasticità risulterebbe infinita giacchè gli allungamenti avverrebbero senza aumento di

tensione. Nel tratto successivo cui si riferiscono i dati precedenti l'aumento della plasticità all'aumentare della tensione è evidente in tutti i casi, e cresce molto rapidamente presso la rottura, specialmente alle temperature più basse.

18. È però da notare che, come osserva anche l'Auerbach, riferendosi sempre alla sezione iniziale non si misura la plasticità vera, giacchè al crescere della tensione totale decresce la sezione, e quindi la tensione riferita all'unità di superficie, non è più proporzionale a quella indicata dal manometro. Per calcolare il valore che si deve sostituire all'ultima ordinata, se si vuol tener conto di questa variazione, basta moltiplicarla per il rapporto  $\mu'$  tra la sezione nel punto iniziale e quella nel finale del tratto ascendente della linea che segue l'orizzontale. Indichiamo con  $x_1$  e  $x_2$  le ascisse di quei due punti, con  $l_0$  la lunghezza iniziale della riga (ossia della parte che si deforma); ammettendo, come è lecito con sufficiente approssimazione, che le lunghezze variano in rapporto inverso delle sezioni, avremo

$$(1) \quad \frac{l_0 + x_2}{l_0} = \mu$$

e

$$\frac{l_0 + x_2}{l_0 + x_1} = \mu'$$

dalla prima si deduce

$$l_0 = \frac{x_2}{\mu - 1}$$

e quindi

$$\mu' = \frac{x_2 \mu}{x_2 + x_1 (\mu - 1)} = \frac{\mu}{1 + \frac{x_1}{x_2} (\mu - 1)}.$$

I valori di  $\mu$  sono dati nella tavola I; volendo si può anche calcolarli direttamente, ammettendo sempre la costanza del volume, colla formola (1).

Eseguendo questa correzione si trova che, per le temperature più basse, dove la curvatura non è molto grande, le curve prendono la forma di una linea retta che si confonde colla tangente nel punto iniziale. Perciò l'inclinazione di questa non ci dà solo il valore della plasticità iniziale, ma anche approssimativamente quello della plasticità vera durante tutta la deforma-

zione. Per le temperature più elevate la curvatura rimane però sempre sensibile.

19. Nei diagrammi della tavola III si sono tracciate queste tangenti e se ne dedussero i valori di  $\pi$ , raccolti nella seguente tabella III come si deducono dalle curve.

TABELLA III.

*Serie E.*

$t$	$\pi$	$\pi_c$	$t$	$\pi$	$\pi_c$
37,2	1,76	7,77	97,7	0,51	2,37
56,7	1,28	5,90	131,2	0,40	1,98
76,2	1,08	5,02	163,2	0,40	2,13

*Serie F.*

$t$	$\pi$	MEDIE		$\pi_c$
		$t$	$\pi$	
- 21,1	2,33	- 20,6	2,68	9,99
20,9	2,93			
20,4	2,76			
19,9	2,72			
+ 7,1	2,75	+ 8,9	2,48	9,01
8,2	2,72			
8,5	2,19			
11,7	2,28			
19,2	2,40	21,0	2,31	8,42
22,9	2,22			
35,4	2,14	35,4	2,14	8,17
35,4	2,14			
53,7	1,85	53,7	1,85	6,46
72,7	1,58	72,7	1,58	6,53
96,6	1,32	96,6	1,32	4,73
117,2	0,88	117,2	0,88	3,12
139,2	0,75	139,2	0,75	2,71
150,8	0,73	150,8	0,73	2,79
176,2	0,77	176,2	0,77	2,85

I valori ridotti  $\pi_c$  sono ottenuti moltiplicando i valori di  $\pi$  per la sezione in mm. q. della riga e per 1,56, valore di un mm. grafico in mm. di allungamento, e dividendo per  $\epsilon$  (tav. I) e per 20 valore di un millimetro delle ordinate in Kg. indicati dal manometro. Essendo la lunghezza della parte che si deforma di circa cm. 50, per ridurre alla lunghezza di 1 m., i numeri così ottenuti si sono moltiplicati per 2. Cosicchè i numeri  $\pi_c$ , presi come misura della plasticità, rappresentano l'allungamento in mm. prodotto in una sbarra di 1 m. da un aumento di tensione di un Kg per mm. q. I valori della plasticità del ferro adoperato, specialmente nella serie F, sono molto notevoli.

La diminuzione della plasticità al crescere della temperatura è evidente, verso le temperature estreme raggiunte pare però si verifichi un minimo; ciò risulta meglio dalle figure 3 e 4 della tavola III, aventi le temperature per ascisse (1 mm. = 5°) e i valori  $\pi_c$  (1<sup>ma</sup> = 0,2) della plasticità per ordinate. I punti dedotti dalle esperienze se ne scostano molto poco. La temperatura del minimo è di circa 150°, cioè coincide approssimativamente con quella della minima variazione di sezione, e la forma della linea è pure analoga a quella della fig. 8 della tavola III. Ciò farebbe supporre che la grandezza della deformazione dipenda dalla diversa reazione elastica che il corpo le oppone, e quindi possa servire anche da sè sola come misura della plasticità, ciò che non si potrebbe ammettere a priori. Ma questo evidentemente non può valere che quando si tratti di confrontare corpi di proprietà poco diverse, o un medesimo corpo in condizioni differenti. Per parecchie altre serie esaminate si giunse ai medesimi risultati. Nella tabella seguente sono raccolti i valori della plasticità come si deducono dalle figure 3 e 4 prendendo per unità il valore a 150°.

TABELLA IV.

$t$	$\pi_e$	$\pi_f$
0	5,32	3,61
25	4,79	3,27
50	3,63	2,77
75	2,42	2,00
100	1,57	1,69
125	1,05	1,15
150	1,00	1,00
175	1,11	1,08

Notiamo inoltre che, oltre alla variazione ora trovata ve n'ha un'altra messa in evidenza dalla maggior curvatura delle linee ad alta temperatura; ciò mostra che, all'aumentare della tensione, aumenta generalmente la plasticità e che quest'aumento è maggiore per le temperature più elevate. Si potrebbe esprimere numericamente questo risultato rappresentando, per esempio, le curve mediante una equazione parabolica di 2° grado che pare si adatti sufficientemente al caso. Si deve però notare che una parte, sebbene non grande, di questo incurvamento per le alte temperature è dovuta all'allungarsi della porzione larga e fredda delle righe sotto le più forti tensioni.

20. Per le serie E ed F i valori del limite di elasticità e della tenacità sono scritti nelle colonne L L' T della tabella V, dove L rappresenta i numeri dedotti dalle curve, L' quelli ridotti.

TABELLA V.

*Serie E.*

L	L'	T	L	L'	T
780	27,6	37,1	800	26,8	37,9
820	27,8	36,8	820	25,8	45,0
840	27,3	38,9	870	25,4	45,2



*Serie F.*

L	L'	T	L	L'	T
800	775	32,4	730	730	29,8
740			730		
760			700		31,3
800			650		25,1
680	720	30,9	660	580	28,7
760			540		25,5
700			600		24,4
740			600		24,5
720	735	31,5	600	600	42,1
750			600		25,3
					44,6

Da questi si deducono i seguenti valori della plasticità  $\pi'$   $\pi''$  a seconda delle due prime definizioni dell'Auerbach (tabella VI). Notiamo che a seconda della terza definizione l'andamento della plasticità sarebbe rappresentato dal diagramma stesso dei rapporti di sezione, e sarebbe abbastanza analogo a quello da me trovato.

TABELLA VI.

*Serie E.**Serie F.*

$\pi'$	$\pi''$	$\pi'$	$\pi''$
9,1	0,25	6,4	0,16
9,0	0,24	6,5	0,18
11,6	0,30	7,0	0,18
11,1	0,29	6,9	0,19
9,2	0,20	7,1	0,19
9,8	0,22	8,1	0,25
		10,2	0,26
		14,9	0,37
		12,9	0,35
		17,6	0,42
		19,3	0,43

Questi numeri, specialmente per la serie E non presentano alcuna regolarità, cioè non rappresentano affatto una variazione che pure è così visibile a colpo d'occhio; per la F darebbero

piuttosto un aumento di plasticità, e infine a basse temperature indicherebbero per la F una plasticità minore che per la E ciò che non si può in alcun modo ammettere; la maggior plasticità delle righe della serie F risultava sempre evidente nel corso delle esperienze.

21. La tabella IV ci dà i valori del limite di elasticità ordinati secondo le temperature crescenti. Le numerose cause di incertezza di questa determinazione non permettono una grande precisione. Risulta solo chiaro che il limite di elasticità decre-sce al crescere della temperatura. Le linee 5 e 6 nella tavola III sono la rappresentazione grafica del fenomeno. Nello stesso tempo apparisce chiara dai diagrammi la tendenza ad accorciarsi del tratto rettilineo orizzontale che segue il limite di elasticità, tendenza che accenna anch'essa ad una diminuzione della plasticità.

22. Noteremo infine come questo fatto si accordi colla diminuzione dell'attrito interno (viscosità) che, secondo diversi autori presenta il ferro a differenza degli altri metalli; le esperienze furono fatte generalmente sulle oscillazioni di torsione. Citerò a questo proposito alcune esperienze del Barns <sup>1)</sup> fatte allo scopo di mettere d'accordo i fenomeni osservati colla teoria di Maxwell, e quelle del prof. Pisati <sup>2)</sup>; secondo queste ultime si presentò pel solo ferro un minimo di attrito interno al crescere della temperatura; però ripetendo più volte le esperienze a temperature diverse e dopo molto lavoro di torsione questo minimo andò a poco a poco scomparendo coll'avvicinarsi allo stato elastico normale.

23. Il Le Chatelier <sup>3)</sup>, tra le conclusioni di un suo studio sopra i fenomeni prodotti dalla ricottura dei metalli asserisce che: 1° La grandezza della deformazione cresce più rapidamente del carico che la produce; 2° al crescer della temperatura le deformazioni prodotte dal medesimo carico crescono. La prima asserzione è confermata dalle nostre esperienze, la seconda non è vera in generale.

24. Da questa seconda parte del nostro studio si conclude:

1) V. *Phil. Mag.* serie 5, vol. 26.

2) *Sulla elasticità dei metalli a diverse temperature.* Gazz. chim. Ital. 1876 o 77 vol. VI e VII

3) C. R. 110. p. 708, 1890.

1.° La misura della plasticità è il rapporto tra la deformazione permanente e lo sforzo necessario a produrla.

2.° A temperatura costante, la plasticità del ferro cresce al crescer della tensione (tab. II).

3.° A temperatura crescente, la plasticità del ferro decresce regolarmente presentando un minimo verso i 150° (tab. IV).

4.° Il limite di elasticità del ferro decresce al crescer della temperatura (tab. V).



SULLA VARIAZIONE DI RESISTENZA DEL FERRO E DEL NICHEL NEL  
CAMPO MAGNETICO; NOTA DEL DOTT. M. CANTONE.

Quando nello scorso giugno compariva negli Atti della R. Accademia di Torino una Nota del sig. Garbasso relativa all'*influenza della magnetizzazione sulla resistenza elettrica del ferro e del nichel*, io mi trovavo di avere già iniziato un lavoro sullo stesso argomento con un metodo pressochè identico, ma non mi era parso opportuno pubblicare i primi risultati ottenuti, perchè avevo constatato qualcosa di anormale nel corso delle mie ricerche. Ponendo infatti dei fili di nichel in un campo magnetico uniforme, trovavo al passaggio della corrente in taluni casi aumento di resistenza, in altri diminuzione. Si noti intanto che dal Thomson <sup>1)</sup>, dal De Lucchi <sup>2)</sup> e dal Goldhammer <sup>3)</sup> si sono ottenute diminuzioni di resistenza per le *lamine* dei metalli magnetici nella posizione predetta, che chiamerò d'ora in poi trasversale, e che invece per i fili di ferro e di nichel nelle stesse condizioni si sono avuti da altri sperimentatori risultati qualitativamente discordanti. Tal complesso di circostanze mi spinse ad instituire delle esperienze più accurate per l'esame delle variazioni di resistenza che presentano i *fili* nel campo magnetico, e qui mi permetto di comunicare i risultati di siffatto studio.

1) *Math. and Phys. Pap.* 2, p. 307.

2) *Atti del R. Istit. Ven.* 8, serie 5.

3) *Wied. Ann.* 31, p. 360 e 36, p. 804.

Vennero costruiti diversi rocchetti con fili fasciati di ferro e di nichel, avvolti su strisce di cartone per modo da riuscire i vari tratti a contatto gli uni degli altri e perpendicolari ai bordi più lunghi della striscia, generando in alcuni casi un solo, in altri parecchi strati. Inoltre per ciascuno dei due metalli si formò un rocchetto, nel quale il filo si dispose attorno le pareti di un tubo di cartone nella direzione delle sue generatrici. Si ebbero così 20 rocchetti che furono tutti cimentati tanto nella posizione *longitudinale*, ossia coi fili paralleli alle linee di forza, che nella *trasversale*.

Il campo fu generato da un'elettrocalamita che avea due masse di ferro dolce, dello spessore di 10 c. m., e smussate agli estremi in guisa da limitare il diametro delle facce polari a 7 c. m. Nel circuito della corrente magnetizzante, fornita sempre da 6 coppie Bunsen, erano inseriti un amperometro, ed un reostata con 8 resistenze, le quali si escludevano successivamente dal circuito mediante appositi ponti, tutte le volte che si voleva in una serie di esperienze produrre aumenti graduali della corrente. L'intensità del campo si fece variare o per mezzo di questo reostata, o modificando, non mai però nel corso di una serie, la distanza delle facce polari.

Il campo si misurò paragonando le correnti indotte che si avevano alla chiusura o all'apertura della corrente magnetizzante in una spirale  $\alpha$  con 4 giri di filo di rame, disposta tra le facce polari coi piani delle spire perpendicolari alle linee di forza, con quelle che si producevano successivamente in un rocchetto A quando in un altro rocchetto B conassiale con questo si mandavano o si annullavano correnti d'intensità note. Faceva parte del circuito secondario, oltre ai rocchetti  $\alpha$  ed A, un galvanometro di Weber il cui ago avea un momento d'inerzia considerevole; e d'altra parte il rocchetto B era inserito in serie con un elemento Bunsen, con un reocordo di sottili fili di pacfong, e con una bussola assoluta delle tangenti avente una sola spira di filo di rame.

Dei rocchetti A e B si calcolò per mezzo della formula del Maxwell <sup>1)</sup> il coefficiente d'induzione mutua, che risultò uguale

1) *Traité d'électricité et de magnétisme*, t. II pag. 349.

a 2658200. Chiamando  $g$  questa costante e denotando con  $f$  l'area totale della spirale  $\alpha$  la misura dei campi col metodo indicato, si fece in base alla formula:

$$(1) \quad F = \frac{g i \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha}{f \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha'},$$

e poichè gli angoli di deviazione  $\alpha$  ed  $\alpha'$  ottenuti al galvanometro balistico, quando si producevano le correnti indotte rispettivamente in  $\alpha$  ed  $A$ , furono sempre assai piccoli, si potè sostituire nel valore di  $F$  al rapporto fra i *seni* quello fra le deviazioni corrispondenti  $\Delta$  e  $\Delta'$  lette sulla scala del galvanometro. La intensità  $i$  della corrente, alle cui variazioni erano dovute le correnti indotte in  $A$ , fu misurata mediante la bussola assoluta, previa determinazione diretta della componente orizzontale del magnetismo terrestre.

Servi per la misura delle resistenze e delle loro variazioni un ponte a cassetta di Carpentier, le cui diagonali racchiudevano rispettivamente due coppie Bunsen ed un galvanometro Deprez e d'Arsonval. Stante la prontezza di questo strumento si potè far passare la corrente nei fili in esame per tempo brevissimo in ciascuna determinazione, sicchè nel mentre si operava in opportune condizioni di sensibilità, si era in grado di evitare, come del resto venne accertato, le azioni termiche disturbatrici derivanti dall'uso nel ponte di una corrente troppo intensa. Col reostata del ponte si valutavano direttamente i centesimi di *ohm*: per apprezzare frazioni più piccole si usava il metodo delle interpolazioni che permetteva di spingersi fino ai *decimillesimi* di questa unità, avendosi per una variazione di  $0^{\text{hm}}.01$  una deviazione sulla scala del galvanometro Deprez che, a seconda delle resistenze totali, oscillava da 20 a 35 mm.

Per ogni serie di esperienze operavo nel seguente modo. Intercalavo in principio tutte le 8 resistenze del reostata nel circuito magnetizzante, chiudevo poi nel ponte successivamente i tasti della pila e del galvanometro; fatta allora la lettura sulla scala di questo strumento mettevo in azione l'elettrocalamita, e mentre procedevo alla nuova lettura sulla scala un'altra persona misurava all'amperometro l'intensità della corrente ma-

gnetizzante; aperto in fine il circuito dell'elettrocalamita leggevo la nuova posizione di riposo del galvanometro. In tal modo si continuava la serie delle determinazioni escludendo volta per volta una resistenza del reostata. Compiute tre o quattro di queste serie, che diedero quasi sempre risultati concordanti, passavo alla misura di  $F$  sostituendo al rocchetto in esame la spirale  $\alpha$ , facendo variare la corrente dell'elettrocalamita alla stessa maniera che nelle precedenti serie, e ricavando le medie degli spostamenti che si aveano volta per volta sulla scala del galvanometro balistico per le correnti indotte ottenute colla chiusura e coll'apertura del circuito dell'elettrocalamita. Da siffatti valori passai alle  $\Delta$  della {formula (1) semplificata, riportandomi alle intensità che avea la corrente magnetizzante nella misura delle variazioni di resistenza.

Per i rapporti  $\frac{i}{\Delta}$  ottenni con esperienze ripetute di quando in quando valori pressochè identici, per cui si poteva esser sicuri che la costante del galvanometro di Weber non avesse subito nel corso delle ricerche modificazioni sensibili.

Espongo sommariamente l'esito delle prime ricerche.

I rocchetti diedero nella posizione longitudinale aumenti di resistenza molto maggiori per il nichel che per il ferro, ed in entrambi i casi accennanti a raggiungere rapidamente un valore massimo. Nella posizione trasversale si ebbero col ferro aumenti di resistenza che erano minori di quelli ottenuti nella posizione longitudinale, e che al crescere di  $F$  accennavano a diminuire dopo avere raggiunto un massimo. Il nichel in questa seconda posizione presentava coll'aumentare di  $F$  in principio piccoli incrementi e poi diminuzioni di resistenza le quali tendevano per valori elevati del campo a raggiungere un limite.

Le curve rappresentatrici del fenomeno, quantunque singolarmente presentassero andamento assai regolare, pure considerate nel loro complesso non permisero di ricavare alcuna conseguenza notevole per l'analisi del fenomeno, inquantochè uno stesso rocchetto collocato a diverse riprese nel campo dava risultati differenti da un caso all'altro, e le divergenze erano analoghe a quelle che si constatano passando da un rocchetto ad

un altro col filo di diverso diametro ed avvolto con un numero differente di strati.

Ho pensato che si potessero avere azioni disturbatrici per i tratti di filo che dal rocchetto venivano fuori dell'elettrocalamita ai serratili dei conduttori annessi al ponte; e l'esperienza ha mostrato appunto che, sebbene si trattasse di porzioni piccole rispetto alla lunghezza del filo costituente il rocchetto, bastava sostituire loro conduttori di rame per rendere sensibilmente concordanti le serie relative ad uno stesso rocchetto per due successivi collocamenti fra le masse di ferro dell'elettrocalamita.

Questo particolare m'indusse a ritenere che anche i tratti di filo corrispondenti alle piegature dovessero complicare il fenomeno, giacchè essi, comunque orientato il rocchetto, riuscivano disposti in direzione perpendicolare a quella secondo cui si voleva studiare il filo. Ed a conferma di ciò si venne in seguito a constatare che con un filo di nichel piegato in due e poi disposto a spirale piana su un disco di cartone, si producevano nella posizione trasversale solo diminuzioni di resistenza. Essendo questo fra i casi studiati l'unico in cui il conduttore in esame fosse situato per intero in direzione perpendicolare al campo magnetico, si rendeva evidente il vantaggio derivante dalla eliminazione delle piegature ai bordi della striscia, inquantochè il fenomeno si presentava ora meno complicato di prima.

Del resto a me pare che l'influenza dovuta alle piegature del filo, sebbene a prima vista trascurabile, non debba esserlo in realtà. Risulta infatti dalle mie precedenti esperienze che un filo di ferro o di nichel in direzione perpendicolare al campo subisce per forze magnetiche non elevate variazioni di resistenza le quali, prescindendo dal segno, sono molto piccole rispetto alle altre relative alla posizione longitudinale; si comprende perciò come, per valori di  $F$  non assai grandi, le parti di filo formanti le piegature possano, nei miei rocchetti in posizione trasversale, subire aumenti di resistenza bastevoli a mascherare le diminuzioni relative ai tratti lunghi, e come ciò non debba avvenire per campi assai intensi.

Seguendo quest'ordine d'idee, per operare in condizioni più opportune, ho voluto procedere ad una nuova serie di ricerche servendomi di un materiale differente.

Costruii per questo coi metalli già cimentati, spirali piane adattate su dischi di cartone e rocchetti nei quali il filo stando avvolto su strisce sottilissime di legno aveva i tratti corrispondenti alle piegature sostituiti da pezzetti di rame saldati. Con dei nastri di nichel e di ferro feci poi rocchetti di due specie; in quelli che distinguerò colla lettera P il nastro era avvolto su striscia di legno colla faccia interna di ciascuna spira addossata sulla faccia esterna della precedente, in modo da aversi una spirale piana schiacciata; negli altri che chiamerò Z il nastro si piegava più volte su se stesso a zig-zag. In entrambi i casi tra le facce prospicienti dei vari tratti del nastro s'interponevano strisce di carta paraffinata per impedirne il contatto. Questi rocchetti furono cimentati trasversalmente ora manteuendo le facce della striscia perpendicolari ora parallele alla direzione del campo: denoterò le due posizioni rispettivamente coi numeri 1 e 2.

Ad eliminare quanto si poteva gli effetti dovuti alle variazioni di temperatura, dopo che si era collocato il rocchetto fra le masse di ferro dell'elettrocalamita si aspettò circa mezz' ora per esser sicuri che il riscaldamento inevitabile nel maneggio del conduttore in esame fosse sparito, ed inoltre fra due successivi passaggi della corrente si fece decorrere l'intervallo di circa 2'. Ottenni così risultati di una grande regolarità; avendosi per tutta la durata della serie variazioni poco notevoli, e qualche volta impercettibili, della resistenza dei rocchetti col circuito magnetizzante aperto.

Si ebbe poi una prova diretta che il passaggio della corrente nel ferro e nel nichel non ne alterasse in maniera apprezzabile la temperatura, essendosi osservato che in tutti i casi in cui si sostituì una pila alle due che d'ordinario agivano nel ponte non si modificarono sensibilmente i valori delle variazioni di resistenza.

Passo ora alla esposizione dei risultati ottenuti. Denoto per brevità i rocchetti con R, le spirali con S ed i nastri con P e Z in conformità a quanto fu convenuto: l'indice F accenna al ferro, N al nichel, *g* ai fili grossi, *f* ai sottili, *l* ai nastri larghi, *s* a quelli stretti, ed infine i numeri 1 e 2 alle due posizioni trasversali di cui già si è fatto cenno.



In una prima tabella sono notate le resistenze  $\rho$  dei vari conduttori cementati, indicando al tempo stesso per i fili i diametri  $d$ , e per i nastri le larghezze  $\lambda$ , e gli spessori  $\sigma$ . Nella seconda e nella terza tabella si danno i risultati relativi alle ricerche definitive, osservando che i rapporti  $\delta$  fra le variazioni di resistenza e le resistenze totali sono dedotti per interpolazione, giacchè a rendere più facile l'esame del fenomeno si è creduto opportuno di prendere comuni i valori di  $F$  per le diverse serie. Le  $F$  sono espresse in unità assolute (C. G. S.), e le  $\delta$  in *centomillesimi*.

	$P_{Fl}$	$Z_{Fl}$	$Z_{Fs}$	$P_{Nl}$	$Z_{Nl}$	$P_{Ns}$	$R_{Ng}$	$R_{Nf}$	$R_f$	$S_{Ng}$	$S_{Nf}$
$\rho$	<sup>ohm</sup> 0,1012	0,0997	0,1889	0,4120	0,2867	0,6029	0,1380	0,4862	0,2498	0,2118	1,0552
$d$	—	—	—	—	—	—	1 <sup>mm</sup> ,02	0,47	0,81	1,02	0,47
$\lambda$	10 <sup>mm</sup> ,0	10,0	5,0	3,0	3,0	1,5	—	—	—	—	—
$\sigma$	0 <sup>mm</sup> ,21	0,21	0,21	0,27	0,27	0,27	—	—	—	—	—

*Posizione trasversale.*

F	$P_{ri}^{(2)}$	$Z_{ri}^{(2)}$	$Z_{rs}^{(2)}$	$P_{ri}^{(1)}$	$Z_{ri}^{(1)}$	$P_{ri}^{(2)}$	$Z_{ri}^{(2)}$	$P_{rs}^{(2)}$	$R_{rg}$	$R_{rf}$	$S_{rg}$	$S_{rf}$
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
200	-5	-5	0	140	7	-48	-59	-29	-14	-4	-4	-5
400	-9	-9	-	206	9	-	-	-57	-	-	-	-
600	-13	-21	-7	240	12	-186	-240	-121	-27	-8	-4	-25
800	-	-	-	-	-	-	-	-	-40	-	-	-
1000	-22	-34	-8	204	2	-420	-509	-307	-	-36	-38	65
1200	-	-	-	158	-17	-	-	-411	-150	-	-	-
1400	-31	-37	-	122	-60	-	-	-520	-	-132	-	-
1600	-	-46	-10	49	-89	-881	-930	-633	-220	-	-137	-217
1800.	-	-48	-	-13	-131	-	-	-744	-313	-	-	-
2000	-53	-51	-20	-	-	-	-	-	-397	-368	-270	-
2200	-52	-	-30	-	-	-1211	-1083	-	-510	-488	-	-481
2400	-	-	-	-	-	-1254	-1131	-	-	-618	-448	-
2600	-	-	-41	-	-	-1279	-1154	-	-	-765	-571	-713
2800	-	-	-	-	-	-1290	-1170	-	-	-	-703	-847
3000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-983

*Posizione longitudinale.*

F	$Z_{Fl}$	$Z_{Fs}$	$Z_{Nl}$	$Z_{Ns}$	$R_F$	$R_{Ng}$	$R_{Nf}$
100	15	23	732	554	66	762	642
200	52	67	1016	807	115	1070	923
300	75	107	1169	982	150	1264	1088
400	94	141	1276	1103	185	1357	1198
500	114	167	1350	1190	212	1418	1274
600	130	179	1405	1253	225	1462	1330
700	145	190	1437	1296	230	1490	—

Nella posizione longitudinale si hanno sempre aumenti di resistenza.

Col nastro  $P_N$  nella posizione trasversale n. 1 abbiamo per i primi valori di F aumenti di resistenza, perchè in questo caso vi sono porzioni del nastro che si magnetizzano longitudinalmente, mentre in tutti gli altri casi di posizione trasversale, nei quali è eliminata siffatta complicazione, le  $\delta$  sono sempre negative, se si eccettuino alcuni valori positivi assai bassi, da attribuire alla circostanza che in qualche serie non riuscisse il rocchetto esattamente in direzione trasversale.

Prima di por termine a questa Nota, parmi opportuno esporre talune considerazioni riguardanti un particolare del fenomeno che ha formato oggetto del nostro studio.

Secondo il Von Wyss <sup>1)</sup> sarebbero gli aumenti di resistenza del ferro in direzione longitudinale proporzionali alle intensità magnetiche, mentre il Goldhammer <sup>2)</sup> in base alle sue esperienze su molti metalli, fra i quali il nichel ed il cobalto, tenderebbe ad ammettere una proporzionalità fra le variazioni di resistenza ed i quadrati delle intensità magnetiche. Tanto per l'uno che per l'altro dei due fisici menzionati, si faceva variare la magnetizzazione solo modificando l'intensità del campo in cui si collocava il corpo. Ora io credo che, pur non precisando la natura di questa legge di dipendenza, la si debba ammettere in un

1) *Wied. Ann.* 36, p. 447.

2) *Wied. Ann.* 36, p. 804.

senso più largo che non si sia fatto sinora, potendosi mostrare coi risultati avanti esposti che se per una diversa orientazione del corpo o per un cambiamento della sua forma cresce l'intensità magnetica, cresce al tempo stesso la variazione di resistenza.

Per provare la mia asserzione comincio dal notare che un ellissoide di suscettibilità  $k$ , collocato in un campo uniforme con uno dei suoi assi nella direzione della forza, assume un'intensità magnetica data dall'espressione  $\frac{k F}{1 + k\gamma}$ , dove la costante  $\gamma$  prende valori differenti a seconda dell'asse cui ci riferiamo. Facendo uno degli assi infinitamente grande ed un altro piccolissimo ci riduciamo ad un nastro indefinito, per il quale risultano i valori di  $\gamma$  dati rispettivamente da <sup>1)</sup>:

$$\frac{4\pi l}{l + s} \quad \text{e} \quad \frac{4\pi s}{l + s},$$

a seconda che si tratti della posizione trasversale n. 1 o dell'altra segnata col n. 2. Qualora si prescinda, nel caso delle nostre esperienze coi nastri, dalla influenza reciproca dei diversi tratti e dalla loro lunghezza limitata si può con certa approssimazione applicare le cose dette ai nastri di cui ci siamo serviti, e poichè il rapporto  $\frac{s}{l}$  è sempre piccolo si ha con valori elevati di  $k$  una intensità magnetica maggiore per la posizione trasversale n. 2.

Ciò posto se esaminiamo i risultati avuti col rocchetto  $Z_{m1}$  (conf. col. IV e VIII), troviamo per esso nella posizione trasversale, qualunque sia il valore di  $F$ , minori decrementi quando le facce del nastro sono perpendicolari al campo, ossia quando minore è la intensità magnetica.

A mostrare poi l'influenza della magnetizzazione come dipendente dalla forma del corpo, può servire da una parte il confronto fra le colonne (III-IV), (VII-IX), avendosi nella posizione trasversale n. 2 per nastri di una determinata sostanza e dello stesso spessore variazioni di resistenza maggiori coi nastri più

1) V. Thomson and Tait-Nat. Phil. art. 494 p.

larghi, e d'altra parte il fatto che i fili di nichel perpendicolarmente alle linee di forza magnetica, e perciò con una intensità magnetica data dall'espressione <sup>1)</sup>  $\frac{k F}{1 + 2\pi k}$ , subiscono diminuzioni di resistenza comprese fra quelle relative alle posizioni (1) e (2) dei nastri, per le quali si hanno magnetizzazioni espresse rispettivamente da

$$\frac{k F}{1 + \frac{4\pi l}{l+s}} \quad \text{e} \quad \frac{k F}{1 + \frac{4\pi s}{l+s}}$$

Importa rilevare infine appoggiandoci a quest'ultimo particolare che mentre i fili di ferro non danno variazioni di resistenza nella posizione trasversale, i nastri di questo metallo nella posizione n. 2 accennano ad una diminuzione di resistenza, per cui si ha ragione di credere che fra il ferro ed il nichel si abbiano per il fenomeno in esame differenze quantitative e non qualitative.

In altro lavoro io spero potermi occupare della legge di dipendenza fra le intensità magnetiche e le variazioni di resistenza. Per ora mi son limitato a trattare di questo argomento quei punti che servissero a mostrare l'analogo comportamento dei fili e dei nastri, per assodare in base ai risultati delle esperienze definitive il fatto che operando in opportune condizioni non riescono i risultati relativi ai fili qualitativamente diversi da quelli ottenuti dal Thomson, dal De Lucchi e dal Goldhammer colle lamine.

## R I V I S T A

SUNTI di A. BATTORELLI.

### Comptes Rendus, 1892.

( Primo Semestre ).

7. — H. LE CHATELIER. *Sulla misura delle alte temperature.*  
— H. Becquerel avendo sollevato una questione di priorità in favore dei lavori di suo padre al riguardo della pirometria termo-

1) V. Maxwell. *Traité*, t. II, p. 77 e 78.

elettrica, l' A. replica che prima di lui, sia a riguardo della pirometria termo-elettrica che della pirometria ottica, non erano stati che accennati o fatti dei tentativi, ma non si erano realizzati degli apparecchi pratici; e che anche le conclusioni teoriche a cui si era pervenuti sono in contraddizione con le sue.

GOUY. *Osservazioni sulla tensione superficiale dei metalli liquidi in occasione di una Nota di Pellat.* — L' A. risponde in questa Nota ad obiezioni mosse dal Pellat alle sue ricerche anteriori sul medesimo soggetto <sup>1)</sup>. Esso osserva che, quanto ai metalli solidi, non ne aveva fatto parola se non per avvertire che non gli pareva legittimo assimilarli alle amalgame a  $\frac{1}{1000}$ . Quanto alle amalgame e al mercurio dice che il punto controverso è del dominio dell' esperienza. Pellat crede di aver dimostrato col metodo degli elettrodi a gocce, che i metalli liquidi (mercurio, amalgame di zinco e di rame) in una soluzione di uno dei loro sali posseggono il massimo di tensione superficiale. Lo studio diretto delle tensioni superficiali delle amalgame ha dato invece all' A. risultati differenti, e la legge da esso formulata mostra che la tensione superficiale di una amalgama ad  $\frac{1}{1000}$ , non polarizzata, è uguale a quella che prenderebbe il mercurio se lo si polarizzasse in modo da condurlo allo stesso potenziale apparente. La divergenza fra i risultati dipende, secondo l' A. dalla depolarizzazione spontanea che si verifica cogli elettrodi a gocce. L' A. crede che, sebbene il Pellat avesse già intraveduto questa causa d' errore, pure non ne abbia riconosciuta tutta la gravità.

D. NEGREANO. *Variazione della costante dielettrica dei liquidi con la temperatura.* — L' A. ha studiato la variazione delle costanti dielettriche al variare della temperatura, per la benzina, per il toluene e per il xilene. Ha effettuato le misure con un condensatore a cinque lamine orizzontali, di cui quattro fisse e una mobile. Le lamine estreme e quella di mezzo erano caricate con un piccolo rocchetto d' induzione, e le due altre intermedie erano messe in comunicazione con un elettrometro a quadranti. Il liquido dielettrico era contenuto in un bacino piatto; veniva scaldato fino ad una certa temperatura, e le costanti dielettriche erano misurate durante il suo raffreddamento. Le formole che rappresentano la variazione di queste costanti col variare della temperatura sono della forma

$$K_t = K_{t_0} \left\{ 1 - \alpha (t - t_0) + \beta (t - t_0)^2 \right\}$$

avendo le costanti  $\alpha$  e  $\beta$  i valori seguenti :

1) Pellat, *Comptes rendus*, 25 gennaio; Gouy, *Comptes rendus*, 4 gennaio.

	$\alpha$	$\beta$
Per la benzina	0,001433	0,0000253
» il toluene	0,0019103	0,0000539
» il xilene	0,001392	0,0000133

Si vede dunque che, nei limiti delle temperature studiate, le costanti dielettriche diminuiscono col crescere della temperatura.

R. BLONDLOT e M. DUFOUR. *Sull' influenza esercitata sui fenomeni di risonanza elettromagnetica dalla dissimmetria del circuito lungo il quale si propagano le onde.* — Il Blondlot aveva impiegato per misurare la lunghezza dell' onda elettromagnetica corrispondente ad un risonatore il metodo seguente <sup>1)</sup>. Un circuito comprende due fili paralleli  $MM'$ ,  $NN'$ , riuniti da un ponte  $\mu\nu$  che può esser collocato in un punto qualunque della loro lunghezza; con l' eccitatore di recente descritto ) si inviano lungo i fili  $MM'$ ,  $NN'$  delle onde elettromagnetiche. Un risonatore è tenuto fermo fra due punti opposti  $RS$  dei fili; e l' esperienza consiste nel cercare per tentativi la posizione del ponte  $\mu\nu$  per la quale sparisce la scintilla del risonatore. La lunghezza del filo  $R\mu\nu S$  così ottenuta è la semi-lunghezza d' onda.

In questa Nota gli A. si sono proposti di studiare l' influenza che poteva esercitare in queste esperienze una dissimmetria introdotta a bella posta nel circuito. A tale scopo il filo  $NN'$  è tagliato verso la sua origine  $N$  e i due capi  $N$  ed  $N_1$ , così formati, sono riuniti per mezzo di una *boucle* di filo di rame  $NKN_1$ , di cui si può cambiare a volontà la lunghezza.

Con questo dispositivo gli A. hanno constatato il fatto che « la lunghezza della *boucle* non ha alcuna influenza sulla posizione del ponte che annulla la scintilla del risonatore » ossia che « la lunghezza d' onda misurata col risonatore è indipendente dalla dissimmetria dei due fili che trasmettono le ondulazioni elettromagnetiche ».

R. COLTON. *Metodo telefonico per lo studio della propagazione delle onde elettriche.* — In questa Nota, che mal si può riassumere in brevi parole, l' A. espone un metodo telefonico da lui ideato per misurare direttamente le lunghezze d' onda e i numeri di vibrazioni, e che può servire ancora a studiare gli altri elementi della propagazione delle onde elettriche.

8. 9. — H. PELLAT. *Osservazioni sull' ultima Comunicazione di Gouy, sulla tensione superficiale dei metalli liquidi.* — In questa Nota l' A. confuta le critiche mossegli dal Gouy nella recente

1) R. Blondlot, *Journal de Physique*, II serie, t. X, pag. 549.

2) *Comptes rendus*, t. CXIV, p. 233.

sua Comunicazione (*Comptes rendus*, 15 febbraio 1892). Ultima di tali critiche era quella che il Pellat non avesse tenuto il dovuto conto della depolarizzazione spontanea verificantesi nello scolamento di un metallo liquido in uno dei suoi sali, per modo che una tal causa di errore avrebbe prodotto la diversità dei risultati sperimentali.

L'A. vi risponde di aver sollevato egli stesso l'obiezione (*Journ. de Physique*, II serie, t. IX, pag. 405) e di avervi risposto esaminando direttamente ciò che avviene nelle proprie esperienze. Da tale esame si è condotti, secondo l'A., all'alternativa seguente: o ammettere l'eguaglianza del potenziale fra il metallo liquido che scola e il sale del medesimo metallo che lo bagna, o ammettere che rimpiazzando per esempio il solfato di zinco ( $\text{ZnSO}_4$ ) a contatto dell'amalgama con uno strato di  $\text{SO}_4$  non risulterebbe alcuna modificazione nelle differenze di potenziale al contatto con l'approssimazione di  $\frac{1}{5000}$ , limite di precisione delle esperienze.

Oltre l'inverosimiglianza della seconda proposizione, l'alternativa non è secondo l'A. dubbiosa, perchè la prima deriva necessariamente dalla legge da esso stabilita sul limite fra la polarizzazione e l'elettrolisi, e dalla legge di Lippmann sull'impossibilità di polarizzare un metallo in una soluzione di uno dei suoi sali.

**10. — A. BERGET. Sui fenomeni elettrocapillari.** — Quando si fa variare in modo continuo la differenza di potenziale di una superficie di mercurio bagnata, sia polarizzandola, sia facendo variare meccanicamente l'area di questa superficie, si produce una variazione continua della costante capillare, cioè la costante capillare è una funzione continua della differenza di potenziale. Il Lippmann che ha studiato questi fenomeni ha dimostrato <sup>1)</sup> pure che questa funzione è indipendente dalla natura chimica del liquido che bagna il mercurio. In una recente Nota il Gouy <sup>2)</sup> ha verificato questa legge per i liquidi impiegati dal Lippmann; egli l'ha estesa alle amalgame, ma d'altra parte ha creduto di poter annunciare che, per certe soluzioni, la legge non si verificava che parzialmente; che cioè allora la legge si verificava soltanto per delle grandi forze elettromotrici di polarizzazione e non per le piccole. Una delle differenze più notevoli si avrebbe, secondo il Gouy, per due liquidi formati, l'uno di una soluzione di potassa a  $\frac{1}{10}$ , l'altra della stessa soluzione contenente  $\frac{1}{100}$  d'ioduro di potassio. L'A., occupandosi di ricerche relative alla capillarità,

1) *Comptes rendus*, 1877.

2) *Comptes rendus*, 1892, pag. 211.



ha fatto, su questo soggetto, tre serie d'esperienze che gli hanno dimostrato come la legge enunciata dal Lippmann nel 1877 si estenda pure ai casi segnalati come eccezioni dal Gouy.

E. BOUTY. *Sulla coesistenza del potere dielettrico e della conducibilità elettrolitica.* — L' A. applicando il metodo da lui adoperato per misurare la costante dielettrica della mica ad alta temperatura <sup>1)</sup> ai dielettrici dotati di una debole conducibilità elettrolitica, ha trovato per le costanti dielettriche numeri concordanti con le medie di quelli fin qui determinati dai vari sperimentatori. Esso ha operato sull'essenza di trementina e sulla benzina pure, del commercio, e sul ghiaccio. L' A. trae da queste esperienze la conclusione che il potere dielettrico e la conducibilità elettrolitica possono coesistere in un medesimo corpo, conformemente alle idee di Maxwell. Di più la costante dielettrica varia poco nelle condizioni in cui la conducibilità cresce in porzioni enormi.

C. SORET. *Sulla conducibilità termica nei corpi cristallizzati.* — Se si ammette con Stokes e Boussinesq che le componenti  $F_1, F_2, F_3$  del flusso di calore totale  $F$ , prese secondo tre assi rettangolari qualunque, possano essere rappresentate con delle funzioni lineari delle tre derivate  $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$  della temperatura la conducibilità di un cristallo dipende nel caso generale da nove coefficienti.

Ma esistono sempre tre assi di conducibilità rettangolari tali che scegliendoli come assi delle coordinate le funzioni di cui si tratta prendono la forma

$$\begin{aligned} -F_1 &= k_1 \frac{du}{dx} - \lambda_3 \frac{du}{dy} + \lambda_2 \frac{du}{dz} \\ -F_2 &= \lambda_3 \frac{du}{dx} + k_2 \frac{du}{dy} - \lambda_1 \frac{du}{dz} \\ -F_3 &= -\lambda_2 \frac{du}{dx} + \lambda_1 \frac{du}{dy} + k_3 \frac{du}{dz} \end{aligned}$$

dipendendo così solamente da tre coefficienti di conducibilità  $k$ , e da tre coefficienti di rotazione  $\lambda$ .

L' A. accenna a tre vie principali per le quali si potrebbe giungere alla determinazione sperimentale dei coefficienti, ed annunzia di avere intrapreso al riguardo alcune ricerche.

1) *Comptes rendus*, 1891, pag. 1310.

**11, 12.** — E. COLOT. *Sulle tensioni dei vapori saturi dei differenti liquidi alla stessa pressione.* — L' A. riporta una tabella, estratta da un lavoro più esteso che egli intende di pubblicare prossimamente, che mostra l'esattezza della legge seguente, da lui enunciata fino dal 1881:

« *Fra le temperature  $t$  e  $\theta$  dei vapori saturi di due liquidi qualunque, che corrispondono ad una stessa pressione (temperature corrispondenti o isobare), esiste una relazione lineare  $t = A\theta + B$ , dove  $A$  e  $B$  sono due costanti i cui valori dipendono dalla natura di liquidi considerati.* ».

Egli osserva che i numeri riportati dimostrano l'esattezza assoluta di questa legge per certi liquidi (mercurio e acqua; etere solforico e acetone) e la grande approssimazione che essa dà per tutti gli altri, perchè in generale gli errori non oltrepassano quelli che possono risultare dall'imperfezione delle osservazioni.

H. ABRAHAM. *Sopra un condensatore campione.* — L' A. descrive minutamente in questa Nota un nuovo condensatore a lamina d'aria. Bisognerebbe riprodurre per intero la Memoria per darne un'idea esatta. Ci basterà qui di dire che ogni precauzione è stata presa per ridurre gli errori al minimo possibile; tantochè l' A. conclude affermando che l'errore possibile sulla capacità non deve oltrepassare  $\frac{1}{1000}$  quando la distanza delle lamine è di 1 cm.

GOUY. *Sui fenomeni elettrocapillari.* — In seguito ad una recente Nota di Berget l' A. espone in questa alcuni dettagli complementari sulle sue esperienze relative ai fenomeni elettrocapillari col mercurio puro e con diversi elettroliti

Esso insiste sui risultati ottenuti con le molteplici esperienze fatte ed esprime il dubbio che l'esperienza di Berget sia affetta da qualche errore grave ed abbia bisogno di esser controllata con misure più numerose e più variate. L' A. conclude dicendo che ciò che mostra come la curva non sia la stessa per i diversi elettroliti è il fatto che le altezze massime sono differenti con lo stesso tubo; così l'acido solforico ad  $\frac{1}{6}$  in volume dà 740<sup>mm</sup>, e l'ioduro di potassio a  $\frac{1}{3}$  dà 686<sup>mm</sup>. Le misure elettriche sono qui secondo l' A., fuori di causa, e queste differenze considerevoli, dove un errore di 1<sup>mm</sup> è inammissibile, non lasciano alcun dubbio.

E. CARVALLO. *Assorbimento cristallino e scelta fra le diverse teorie della luce.* — Nelle ricerche anteriori sulla polarizzazione rotatoria del quarzo <sup>1)</sup> l' A. aveva segnalato nella parte calorifica dello spettro una perturbazione da lui attribuita all'assorbimento. Esso fu perciò portato a studiare l'assorbimento nei cristalli.

1) *Comptes rendus*, dicembre 1891 e febbraio 1892.

Solo il Becquerel ha formulato una legge sperimentale; essa è così concepita <sup>1)</sup>. « Se un raggio di luce monocromatica traversa un cristallo birefrangente l'assorbimento non dipende che dalla posizione della *vibrazione di Fresnel*. L'intensità del raggio emergente è data dalla formula

$$V_i = V_{i_0} (e^{-mz} \cos^2 \alpha + e^{-nz} \cos^2 \beta + e^{-pz} \cos^2 \gamma),$$

dove  $i_0$  è l'intensità del raggio incidente supposto uniradiale,  $i$  l'intensità del raggio emergente;  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli della vibrazione di Fresnel con gli assi di elasticità ottica;  $z$  lo spessore del cristallo traversato dal raggio;  $e$  la base dei logaritmi neperiani ».

L'A. trae da questa legge conseguenze molto importanti. La prima di tutte è quella che « *Quando un raggio traversa un cristallo assorbente, il suo stato di polarizzazione cambia a misura che esso penetra nel cristallo* »; ed infatti ammettendo che l'effetto dell'assorbimento sul raggio fosse soltanto una modificazione di intensità si giungerebbe coll'applicare la legge di Becquerel ad una conclusione assurda. Di più l'A. con una serie di esperienze fatte con una tormalina, esperienze di cui promette i particolari e che in questa Nota accenna soltanto, risponde anche alla domanda se questo cangiamento di polarizzazione sussiste quando il raggio esce dal cristallo; e perviene alle conclusioni seguenti:

1° *La legge di H. Becquerel è verificata nel caso limite importante in cui una sola delle tre componenti dell'intensità sussiste.*

2° *Essa si estende ai raggi calorifici.*

3° *Quando un raggio straordinario traversa la tormalina in una direzione obliqua all'asse, il suo stato di polarizzazione varia PROGRESSIVAMENTE fino a che lo spessore traversato sia quello che estinguerebbe il raggio ordinario. Questo stato rimane allora invariabile fino all'uscita. Là il raggio riprende BRUSCAMENTE lo stato di polarizzazione primitivo.*

L'ultima legge, sperimentata soltanto per il raggio straordinario della tormalina si applica evidentemente a tutti i casi sottoposti alla legge di Becquerel.

L'A. fa osservare che l'enunciato solo della legge di Becquerel conduce a rigettare il sistema Neumann, Mac-Cullagh; e che poi la terza delle sue conclusioni non permette di fissare la vibrazione invariabilmente nel piano dell'onda, come richiede l'ipo-

1) *Annales de Chimie et de Physique*, t. XIV, 1833.

tesi di Fresnel che l'etere è incompressibile. Trascurando d'altra parte per la componente parallela all'asse l'assorbimento, che era debole nella tormalina osservata, l'A. mostra con una figura come si possano immaginare le trasformazioni successive della vibrazione in corrispondenza alla formola di Becquerel.

**13.** — J. VIOLLE. *Sull'irraggiamento dei corpi incandescenti e sulla misura ottica delle alte temperature.* — La misura dell'intensità di una radiazione determinata costituisce il processo più semplice e più sensibile per determinare la temperatura di un corpo incandescente. È necessario però conoscere la legge secondo la quale la radiazione varia con la temperatura. L'A. lasciando da parte ogni questione di priorità, paragona i numeri trovati operando su del platino collocato in un campo calorifico costante e irraggiante liberamente verso il fotometro con quelli pubblicati recentemente dal Le Chatelier che ha fatto le sue misure sopra un certo numero di corpi scaldati nella fiamma di bruciatori ad aria e gas mescolati. In queste esperienze si può ammettere, per la trasparenza della fiamma, di trovarsi nel caso di un corpo caldo collocato in un ambiente freddo. In tutti i casi l'intensità della radiazione a  $1000^{\circ}$  è presa per unità.

I numeri trovati dai due A. sono concordi fino a  $1500^{\circ}$ ; dopo vi è differenza, che dal Le Chatelier viene attribuita all'imperfezione dei campi calorifici usati dall'A., che avrebbero agito come freddi relativamente al platino. L'A. invece, avendo posto ogni cura per evitare questa causa d'errore, crede che le differenze derivino dal fatto che il vetro rosso è via via meno monocromatico a misura che la temperatura del corpo irraggiante si eleva.

L'A. cita in ultimo i risultati ottenuti studiando l'irraggiamento di un filo di platino, trasmesso da un prisma e da una lente di salgemma, col mezzo di una pila termoelettrica lineare collocata nella parte oscura dello spettro ad una distanza dal rosso estremo sensibilmente eguale alla larghezza dello spettro visibile. I numeri trovati sono

Temperature:	$1000^{\circ}$ ;	$1200^{\circ}$ ;	$1400^{\circ}$ ;	$1600^{\circ}$
Intensità;	1;	1,85;	2,47;	2,91

e dimostrano che l'intensità di questa radiazione non cresce più rapidissimamente al di là di un certo limite.

**H. LE CHATELIER.** *Sulla temperatura del Sole.* — I numerosi tentativi fatti per determinare la temperatura del Sole hanno condotto ai risultati più discordi; i numeri dati fin qui hanno variato da  $1500^{\circ}$  a  $5000\ 000^{\circ}$ . Ciò non pertanto è stato sempre adoperato il

metodo di Pouillet e le determinazioni sperimentali sono state sempre assai concordanti; le differenze sul risultato finale provengono solo, come ha osservato il Vicaire, dalle differenti leggi ammesse per collegare l'irraggiamento dei corpi incandescenti con la loro temperatura.

L' A. osserva che quanto maggiore è l'intervallo di temperatura in cui è stata studiata la relazione fra essa e l'irraggiamento per dedurne la detta legge, tanta maggior fiducia meritano le determinazioni fatte. Siccome l'intervallo di temperatura nelle ricerche dell' A. è stato di  $1100^{\circ}$  (da  $700^{\circ}$  a  $1800^{\circ}$ ), ossia quattro volte più esteso delle più estese esperienze fatte finora, così egli crede che i suoi risultati siano più attendibili. Ora, secondo le esperienze dell' A., l'intensità delle radiazioni rosse emesse da un corpo incandescente, il cui potere emissivo sia uguale all'unità può essere rappresentata dalla formola

$$I = 10^{3,7} T^{\frac{3210}{T}}.$$

La misura dell'intensità delle radiazioni solari è stata fatta col fotometro impiegato dall' A. nelle sue ricerche pirometriche anteriori, e tre serie concordanti hanno dato 125000 per l'intensità delle radiazioni rosse arrivanti dal Sole alla Terra al di fuori dell'atmosfera. Questa intensità conduce ad una temperatura effettiva di  $7600^{\circ}$ , chiamando, secondo Violle, temperatura effettiva del Sole quella che dovrebbe avere un corpo di potere emissivo uguale all'unità per inviare a noi delle radiazioni della stessa intensità del Sole.

L. DE LA RIVE. *Applicazione della teoria delle linee di forza alla dimostrazione di un teorema d'elettrostatica.* — Il Bertrand nelle « Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité » dimostra, come una conseguenza delle proprietà generali del potenziale e del teorema di Green, il teorema seguente:

« Se nel campo di un sistema di conduttori elettrizzati si sostituisce loro una o più superfici di livello che circondino rispettivamente le masse agenti, con una densità superficiale eguale a  $-\frac{1}{4\pi} \frac{d\phi}{dn}$ , il campo all'esterno di queste superfici resta lo stesso, e il potenziale all'interno è costante e uguale al valore che esso prende nel campo su queste superfici stesse ».

Due dimostrazioni analitiche dirette ne sono state date, una da Chasles <sup>1)</sup> e l'altra da W. Thomson <sup>2)</sup>. La dimostrazione che

1) *Connaissance des Temps pour 1845* (1842).

2) *Cambridge math. J.* 1842-1843.

L' A. ne dà in questa Nota è una modificazione di quella del Thomson, ottenuta riferendo il campo alla linea di forza, ciò che semplifica l' integrazione.

A. BERGET. *Sui fenomeni elettro-capillari*. — In questa Nota l' A. risponde alle obbiezioni mossegli dal Gouy <sup>1)</sup> per le esperienze fatte al fine di mostrare la generalità della legge del Lippmann sui fenomeni elettro-capillari; esso conclude affermando che le sue misure non fanno altro che far rientrare in questa legge generale, confermata da molte delle esperienze del Gouy stesso, uno dei corpi da esso segnalato come eccezione.

14. — LECOQ DE BOISBAUDRAN. *Sugli spettri elettrici del Gallio*. — L' A. riporta un lungo e minuzioso esame dei differenti spettri del Gallio ottenuti con scintille elettriche, sia con soluzioni di suoi sali, sia con Gallio metallico, con scintille condensate o no, nell' aria o in altri gas. Osservando che differenze analoghe si producono, in modo più o meno marcato, con quasi tutti i corpi ne conclude esser sempre necessario di definire le condizioni nelle quali si sono ottenuti gli spettri elettrici.

PAUL BARY. *Sugli indici di rifrazione delle soluzioni saline*. — L' A. si è proposto in questa Nota di cercare, col mezzo degli indici di rifrazione, quale possa essere lo stato di un sale disciolto entro la sua soluzione. Le esperienze fatte dall' A. consistevano nella misura degli indici di rifrazione di un sale sciolto in quantità variabili d' acqua; i risultati erano rappresentati da curve, prendendo per ascisse le quantità di sale anidro contenute in 100 parti di soluzione e per ordinate gli indici di rifrazione del liquido.

All' infuori della teoria di Svante Arrhénius, applicabile soltanto alle soluzioni molto diluite l' A. ammette la possibilità delle tre ipotesi seguenti sullo stato di un sale nella sua soluzione:

1.° I corpi formanti la soluzione non si combinano ossia la soluzione non contiene altri composti definiti che il solvente e il sale disciolto.

Se questa ipotesi fosse esatta la legge rappresentante i valori dell' indice di rifrazione in funzione della quantità di sale per cento corrisponderebbe ad una retta che avrebbe per equazione

$$n_1 = n_0 + \frac{(n_s - n_0) p_s}{100}$$

dove  $n_0$ ,  $n_s$ ,  $n_1$  sono gli indici di rifrazione dell' acqua, del sale ] e della soluzione, e  $p_s$  è il peso del sale contenuto in 100 gr. di soluzione.

1) *Comptes rendus*, Marzo 1892.

2.<sup>o</sup> Ogni concentrazione di una soluzione corrisponde ad un composto che ha proprietà particolari sebbene poco dissimili da quelle dei composti vicini nel grado di concentrazione. In tal caso la legge sarà rappresentata da una curva di cui non si può prevedere la forma.

3.<sup>o</sup> Un sale solubile è suscettibile di formare uno o più idrati liquidi alla temperatura ordinaria e, secondo la quantità d'acqua e di sale che entrano in 100 parti di soluzione, si forma l'uno o l'altro di questi idrati con o senza eccesso di acqua. In questo caso la curva sarà una linea spezzata formata di frammenti di rette, ogni angolo corrispondendo ad una combinazione definita del sale con la totalità dell'acqua contenuta nella soluzione.

Questa terza ipotesi partecipa di ambedue le precedenti e rende conto nel modo più generale dei risultati ottenuti dall'A. In quasi tutti i casi infatti esso ha trovato risultati rappresentabili con linee spezzate. Ciò non ostante si è presentata qualche rara eccezione; così la curva degli indici del solfato di rame è una retta, quella dell'azotato d'argento è invece una curva bene accentuata e che volge la concavità verso l'asse delle ascisse. L'A. crede che forse esperienze più accurate su questo sale potrebbero mostrare che anche la sua curva è una spezzata. Ad ogni modo esso conclude che, ogni punto singolare della curva indicando un cambiamento brusco nello stato molecolare del mezzo, par naturale di dovere ammettere che esso corrisponda alla formazione di un nuovo composto in seno al liquido.

I risultati delle esperienze che l'A. riporta in questa Nota sono quelli dei seguenti sali: *iposolfito di sodio, bicromato di potassio, cloruro di potassio, cloruro di sodio, solfato di litio, solfato ferroso*; le esperienze sono state eseguite col refrattometro di Féry.

EDOUARD BRANLY. *Nuova conducibilità unipolare dei gas.* — La conducibilità di un gas scaldato fra due superfici di platino portate al rosso è stata dimostrata dal Becquerel e confermata dal Blondlot. I fenomeni esposti dall'A. in questa Nota riguardano un gas compreso fra un metallo portato al rosso ed un metallo mantenuto alla temperatura ordinaria. Con cinque serie di esperienze diverse, la cui descrizione particolareggiata ci porterebbe troppo in lungo, esso sarebbe condotto a concludere che in tali condizioni il gas è sempre conduttore, ma che *la sua conducibilità è molto maggiore quando il metallo freddo è negativo.*

JULIEN LEFÈVRE. *Sull'attrazione di due lamine separate da un dielettrico.* — L'A. espone in questa Nota un metodo di mi-

sura fondato sull'uso della bilancia per determinare l'attrazione di due lamine elettrizzate, separate da un dielettrico non posto in contatto intimo con esse, e trova che questa attrazione è rappresentata dalla formola

$$\frac{F}{F'} = \left( \frac{e + e'}{\frac{e}{k} + e'} \right)^2$$

dove  $F$  indica l'attrazione delle due lamine alla distanza  $e + e'$  nell'aria;  $F'$  indica l'attrazione alla stessa distanza quando vi è interposta una lamina isolante a facce parallele di spessore  $e$ ;  $e'$  indica quindi la somma, degli spessori d'aria situati da una parte e dall'altra di questa lamina;  $k$  infine è la costante dielettrica della lamina medesima.

L'A. crede che la misura dell'attrazione di due lamine metalliche si presterebbe benissimo alla determinazione delle costanti dielettriche, poichè sarebbe un metodo semplice e rapido che non richiederebbe altro che una bilancia di precisione.

SUNTI di A. STEFANINI.

M. ZILOFF. *Sulla propagazione delle onde elettriche nei fili.* (*L'Electricien*, (2) III, n. 60, 1892). — In una nota presentata alla Società francese di Fisica, l'A. rende conto dei risultati, che presentano qualche novità, ottenuti da uno dei suoi allievi, il sig. Bernacki, che ha ripetuto le esperienze del Lecher sulla propagazione delle onde elettriche lungo i fili.

Il Bernacki ha impiegato come risonatore un tubo di Geisler. Questo tubo era posto a guisa di ponte sui due fili paralleli, che partono dalle lastre affacciate a quelle del circuito primario, e non cessava d'illuminarsi nemmeno quand'era posto a una distanza non tanto piccola dai fili, e perpendicolarmente alla loro direzione.

Lungo i fili si propagano simultaneamente delle onde stazionarie di lunghezze diverse, ma ponendo un ponte metallico in una posizione  $\alpha\alpha'$ , si annullano tutte le onde che in  $\alpha\alpha'$  non hanno un nodo. Un'altra serie di onde si può annullare ponendo un altro ponte in un'altra posizione  $\beta\beta'$ , e allora non restano che quelle i cui nodi sono simultaneamente in  $\alpha$  e in  $\beta$ . La distanza  $\alpha\beta$  comprende dunque un numero intero di mezze onde d'un certo sistema, ed è facile ridurre questo numero all'unità.

Quei ponti funzionano in questo caso come i diaframmi che s'intercalano nei tubi sonori, e che non modificano i suoni dei tubi stessi, se si trovano in un nodo di vibrazione.



Guidato dall'analogia acustica, e seguendo i consigli dello Ziloff, il Bernacki studiò se fosse possibile biforcare le onde elettriche; e l'esperienza mostrò che ciò era possibile, perchè il tubo s'illuminava se si poneva lungo una coppia di fili parassiti attaccati in due punti corrispondenti  $\alpha\alpha'$  dei primi. Se si fa ponte in uno dei nodi di questi nuovi fili, l'effetto che si ha nei primi è aumentato.

Continuando in quest'ordine di ricerche, lo Ziloff pensò che si potrebbe produrre l'interferenza delle onde elettriche come quella delle onde sonore, col metodo indicato dal König. Una coppia di fili, che comprende un'intera lunghezza d'onda, fu posto in derivazione sui primi in  $\alpha\beta$ ,  $\alpha'\beta'$ , e allora il tubo di Geisler, posto sui fili principali, non s'illuminava che debolmente mentre riprendeva il suo splendore se si metteva un ponte sui fili derivati, salvo che quel ponte non fosse posto su un nodo dei fili in derivazione, perchè allora le onde interferivano di nuovo, e il tubo non s'illuminava più.

I. KLEMENCIC. *Sul contegno del ferro verso le oscillazioni elettriche.* (*Wiener Anzeiger*. 1892). — L' A. descrive alcune ricerche, nelle quali egli fece propagare le onde, eccitate in un induttore secondario, lungo fili diversi, studiando l'assorbimento dell'energia nei diversi casi. Egli trovò che l'assorbimento nel ferro è maggiore che nei fili di altri metalli, come il rame, il platino ecc., ma del resto identici fra loro; e ciò dimostra che la magnetizzazione del ferro si manifesta anche colle vibrazioni rapidissime, che si hanno coll' eccitatore di Hertz.

### Philosophical Magazine. — Vol. XXXI. 1891.

J. H. GLADSTONE e G. GLADSTONE. — *Refrazione e dispersione del fluorobenzene e dei composti analoghi.* — I composti studiati furono i prodotti di sostituzione degli alogeni nella benzina, ed erano stati preparati dal dott. Joungh. Gli A. determinarono la refrazione molecolare della benzina per le righe A, B, C, F, G, H; e sottraendo dai valori trovati il valore ammesso per l'idrogeno, ottennero la refrazione molecolare del gruppo  $C_6H_5$ . Quella degli alogeni si ottiene sottraendo quelli del gruppo  $C_6H_5$  dai valori trovati per i composti che gli alogeni stessi formano col benzene. Come era stato trovato per i composti metallici, la refrazione molecolare del fluoro risultò estremamente piccola anche in questi composti organici.


Lo studio di molti altri corpi, come  $CaF_2$  (solido),  $KF$ ,  $AgH$ ,  $Fl$ ,  $HFl$ ,  $H_2SiFl_6$  (in soluzione acquosa) e di alcuni fluosilicati, ha

dato per la refrazione molecolare del fluoro dei numeri che variano fra 0,53 e 0,88 per la riga C, e ancora minori per lunghezze d'onda più corte. Il cloro, il bromo, l'iodio nei composti benzinici, per la riga A hanno dato rispettivamente i valori 9,9, 15,3 e 24,5.

C. BARUS. *L'equilibrio chimico dei solidi, in relazione colla pressione e colla temperatura.* — Da esperienze fatte sull'influenza della pressione sulla f. e. m. e sulla resistenza della pila Na Hg | vetro | Hg, e sulla resistenza dei coibenti liquidi, l'A. ritiene che si possa dedurre che anche l'equilibrio chimico dei solidi varia al variare della pressione; ma non è possibile un breve riassunto di tutti i dettagli di queste ricerche.

C. V. BOYS, A. E. BRISCOE e W. WATSON. *Sulla misura della radiazione elettromagnetica.* — Con due metodi diversi gli A. hanno cercato di determinare il quadrato medio dell'intensità delle correnti ondulatorie, che si producono in un risonatore filiforme sotto l'influenza di un eccitatore che gli sia vicino.

Nel primo metodo si servirono di una coppia di risonatori a

forma di , contenuti in un tubo di vetro, e posti vicinissimi

fra loro. Uno è fisso; l'altro è girevole attorno a un filo sottile di quarzo, che passa pel mezzo dei lati orizzontali. Poichè le oscillazioni indotte son sempre della medesima fase in ambedue, per l'azione elettrodinamica i due fili si devono attirare; ma poichè anche si caricano similmente, per l'azione elettrostatica si devono respingere. Se i fili fossero rettilinei, le due azioni si eliderebbero, ma l'azione elettrostatica è efficace principalmente alle estremità, e quella elettrodinamica nel mezzo, e perciò il filo mobile deve rotare attorno all'asse di sospensione.

Le esperienze fatte mostrarono che la forza così attiva è al più di  $3 \cdot 10^{-7}$  dine, e che la radice quadrata del medio quadrato della corrente nella parte di mezzo del risonatore era minore di 0,03 C. G. S.

F. J. SMITH. *Misura del tempo della magnetizzazione di un cilindro di ferro.* — Se un cilindro di ferro si magnetizza in una spirale, e poi si apre la corrente e si uniscono i capi della spirale con un galvanometro, la deviazione misura la perdita del magnetismo. Invece della spirale primaria si può anche unire col galvanometro una spirale indotta posta attorno al cilindro di ferro. Per mezzo di una seconda spirale posta sopra quella indotta, che è inclusa nel circuito della prima, mentre la prima spirale è percorsa da una corrente d'intensità conosciuta, e che poi si inter-

rompe, può anche ottenersi la deviazione del galvanometro in unità assolute; ma l'A. non indica alcun risultato numerico.

A. SCHUSTER. *Teoria elementare dei fenomeni di refrazione.* — Nella scomposizione della superficie d'onda in zone elementari, che si fa ordinariamente nello studio elementare della diffrazione non si tien sufficiente conto dell'eguaglianza di fase dei moti risultanti per le singole zone. — L'A. tratta da questo punto di vista il caso della diffrazione su un orlo rettilineo di uno schermo, supponendo l'onda piana, e scomponendola in strie elementari verticali, parallele all'orlo stesso. Se P è il punto pel quale si vuol calcolare l'azione dell'onda,  $p$  la lunghezza della perpendicolare condotta da esso alla superficie d'onda,  $PM_1, PM_2, \dots$  le lunghezze delle rette condotte nel piano orizzontale da P ai limiti delle strie elementari, allora la divisione solita a farsi è tale, che sia

$$PM_1 = p + \lambda/2, \quad PM_2 = PM_1 + \lambda/2, \dots$$

In questo caso le fasi dei moti risultanti sono molto diverse per le singole zone elementari, specialmente per quelle degli ordini inferiori, e perciò la somma algebrica delle ampiezze non dà i valori esatti nè per la posizione, nè per l'intensità dei massimi e dei minimi. Ma se si rammenta che per la divisione in striscie deve esser data a priori una variazione di fase di  $\lambda/8$ , ottenendo la variazione totale  $\lambda/4$ , che è necessaria, col sommare gli effetti delle strie, si è condotti a scegliere la divisione anzidetta in modo che sia

$$PM_1 = p + \frac{3}{8} \lambda \quad PM_2 = PM_1 + \lambda/2, \dots$$

L'A. dimostra che adottando questa divisione le fasi sono presso che uguali per tutte le strie, e che quindi tanto per la posizione, quanto per l'intensità dei massimi e dei minimi, si hanno dei valori che concordano con quelli teorici.

Lord RAYLEIGH. *Sulla fotografia con un foro sottile.* — L'A. richiama le condizioni, con le quali si può ottenere delle immagini distinte con dei fori sottili, fondandosi sulle considerazioni del Lummel circa il problema della diffrazione prodotta da una apertura circolare. Ma nel trasportare tali considerazioni al caso ora trattato, devesi notare che quanto all'azione fotografica la perdita di luce causata dalla piccolezza del foro è compensata dalla durata dell'esposizione.

Da calcoli eseguiti l'A. trova che la grandezza più conve-

niente del foro, per un oggetto a distanza infinita (riproduzione dei paesaggi) è compresa fra i limiti dati da

$$r^2 = \lambda f \text{ fino a } r^2 = \frac{1}{2} \lambda f$$

essendo  $r$  il raggio del foro,  $f$  la sua distanza dalla lastra fotografica, e  $\lambda$  la lunghezza d'onda. Esperienze fatte con fori di diversa grandezza hanno confermato questo risultato.

T. PRESTON. *Il problema del contegno del campo magnetico attorno a un magnete girevole.* — La questione che si è proposto l'A. è quella di sapere se per la rotazione della terra attorno al suo asse, il campo magnetico (riguardando la terra come un magnete) ruota o no con essa.

Per risolverla, l'A. propone l'esperienza seguente: Si faccia rotare, al di sotto di un disco metallico coassiale, un magnete cilindrico; il magnete, se ruota nel suo campo che resta fisso, si caricherà di elettricità positiva alle basi e negativa nel centro, e il disco si caricherà negativamente su una faccia, positivamente sull'altra. Se invece è il campo che ruota, si caricherà anche il disco, perchè sarà tagliato dalle linee di forza; ma questa volta la carica positiva sarà sugli orli, e quella negativa al centro, tanto su una faccia che sull'altra.

L'A. fa peraltro osservare che coi mezzi ordinari è quasi impossibile costatare le cariche che dovrebbero così prodursi.

J. SWINBURNE. *Sui condensatori per correnti alternate.* — L'A. tratta della costruzione di tali condensatori, prendendo anche a considerare l'assorbimento di energia che presentano.

S. P. THOMPSON. *Sull'uso dello spato fluore negli strumenti ottici.* — È all'uso dello spato fluore, che gli obiettivi costruiti dallo Zeiss debbono le loro migliori proprietà; e l'A. indica che un prisma retto di flint compreso fra due prismi di spato fluore ha un poter dispersivo uguale a quello della combinazione di cinque prismi. Se in luogo del prisma di flint si adopra un prisma di spato calcare con l'asse ottico normale al raggio visuale, la combinazione anzidetta funziona anche da polarizzatore. Perciò potrebbe adoprarsi con vantaggio negli apparecchi spettrofotometrici.

E. L. NICHOLS. *Sull'arco elettrico alternativo fra una sfera e una punta.* — L'A. rende conto di esperienze fatte nel suo laboratorio dai sigg. Archbold, Teeple e Caldwell. L'arco fu ottenuto eccitando il circuito primario di un rocchetto di Ruhmkorff colla corrente di una piccola dinamo a correnti alternate, il cui indotto faceva 14 000 giri al minuto. Ponendo un galvanometro a grandissima resistenza in derivazione fra la sfera e la punta,

per una conveniente lunghezza dell'arco il galvanometro era percorso da una corrente continua, diretta sempre dalla sfera alla punta. Ciò mostra che lo strato d'aria fra gli elettrodi funziona qui da valvola come per le scariche ordinarie dei rocchetti e dei condensatori.

J. J. THOMSON. *Conduttività dei gas.* — Contrariamente a quanto aveva trovato l'A. l'Arrenius non riconobbe nei vapori dell'acido cloridrico, dell'acido iodidrico e del cloruro d'ammonio, una conduttività maggiore di quella dell'aria. (cfr. *N. Cim.* 31 pag. 85). Il Thomson trova la spiegazione di questa differenza nel fatto che la conduttività dei gas riscaldati sia dovuta alla dissociazione, e nel modo con cui sperimentava l'Arrenius. Infatti l'Arrenius iniettava nella fiamma il gas che voleva studiare, e così questo gas veniva circondato da altri, specialmente dall'idrogeno; ed è chiaro che in questo modo, per es. l'idrogeno ritardava la dissociazione dell'acido cloridrico e dell'acido iodidrico: quanto al cloruro d'ammonio, il caso non è punto diverso, perchè esso si scompone in  $\text{HCl}$  e in  $\text{NH}_3$ , e questa non conduce l'elettricità. L'A. termina rettificando altre affermazioni dell'Arrenius relative alla dipendenza fra la conduttività elettrica e la pressione osmotica dei gas.

A queste osservazioni fu replicato dall'Arrenius nel fascicolo di maggio 1892 del *Phil. Mag.*; ma il Thomson insiste sui fatti sopra rammentati, che non gli sembrano confutati dall'Arrenius in modo decisivo.

S. BIDWELL. *Esperienza da lezione per mostrare l'azione del calore sulla suscettibilità magnetica del nichel.* — Il principio di questa esperienza è lo stesso di quelle descritte dallo Stefan (*N. Cim.* 23 pag. 179).

Un disco di rame, del diametro di 5 cm. e dello spessore di 0,08 cm., attaccato a una sospensione bifilare lunga 85 cm., porta una linguetta di nichel ( $1,5 \times 0,8 \times 0,08$  cm.) terminata a punta (circa  $135^\circ$ ), che sta, colla sua parte sporgente orizzontale, di fronte a un magnete fissato un po' lateralmente. Il magnete attira il nichel, e il pendolo è trattenuto fuori della sua posizione di equilibrio. Se si pone sotto al nichel una fiamma ad alcole, il nichel perde le proprietà magnetiche quando è a una temperatura di circa  $300^\circ$  e il pendolo si stacca dalla calamita; ma durante l'oscillazione il nichel si raffredda ed è nuovamente attratto, poi si stacca di nuovo, e così via; e regolando la fiamma si può mantenere il pendolo in oscillazione per molto tempo.

J. J. THOMSON. *Sulla rappresentazione delle proprietà del campo elettrico, per mezzo dei tubi d'induzione elettrostatici.* —

Se si attribuisce un'esistenza reale ai tubi d'induzione elettrostatica che furono immaginati dal Faraday, l'A. mostra come si possano spiegare molti fenomeni elettrici, come il passaggio dell'elettricità nei metalli, nei liquidi e nei gas, la produzione di una corrente, la forza magnetica, le correnti indotte, e così via, come dovuti alla contrazione o alla dilatazione di quei tubi e al loro moto nel campo elettrico.

Egli ammette che il campo elettrico sia ripieno di tubi d'induzione elettrostatica, tutti d'ugual lunghezza, e che tal lunghezza corrisponda alla carica che nell'elettrolisi si trova associata con un atomo di un elemento monovalente. Quei tubi debbon esser chiusi, o terminare a due atomi liberi, analogamente a ciò che si ha per le linee vorticosi nell'elettrodinamica.

Le estremità di un tubo aperto d'induzione presentano elettricità libera, e perciò son sempre situate nella materia, e quindi l'esistenza di elettricità libera, sia in un metallo, che in un elettrolita o in un gas indica sempre l'esistenza d'atomi liberi. L'elettrizzazione è sempre accompagnata da dissociazione chimica, e la sparizione di elettricità da una combinazione. Questo, che è stato sempre ritenuto vero pel passaggio dell'elettricità negli elettroliti, sembra doversi estendere anche al passaggio dell'elettricità nei gas; e quantunque non sia facile avere delle prove dirette, è probabile che lo stesso valga anche per il caso della conduzione metallica. L'A. cerca di ribattere le obiezioni, che potrebbero farsi a questo modo di considerare il fenomeno, e fa osservare che la teoria elettromagnetica della luce porta un altro appoggio all'ipotesi, che la conduzione metallica sia della stessa natura di quella elettrolitica. Poichè, l'opacità degli strati sottili metallici è enormemente minore di quello che la teoria indicherebbe, se la conduttività dello strato, per le vibrazioni rapide come quelle della luce, fosse la stessa di quella per le correnti continue. Ora, secondo la teoria dell'A. questa differenza si spiega facilmente, ammettendo che il tempo  $T$  che mette un tubo d'induzione in un metallo per annullarsi, cioè per ridursi ad una lunghezza uguale alla distanza fra gli atomi di una molecola, sia dell'ordine di grandezza di una vibrazione luminosa. E questo tempo  $T$ , con facili considerazioni l'A. trova che è dato da

$$T = \frac{K}{4\pi} \frac{\sigma}{9 \cdot 10^{10}}$$

ove  $K$  è la costante dielettrica in misura elettrostatica, e  $\sigma$  è la resistenza specifica del conduttore. Per l'argento, per es., è  $T = 1,5 K \cdot 10^{-19}$ ; e poichè per l'acqua e l'alcole, che hanno ap-

pena tracce di conduttività metallica, si ha  $K$  uguale a 70 o 100 circa, si può ritenere che, per i metalli,  $K$  abbia un valore più grande; e si vede così che se  $K$  ha per i metalli un valore dello stesso ordine di quello per l'acqua e l'alcole, il valore di  $T$  è comparabile con quello di una vibrazione luminosa, di modo che la conduttività per tali vibrazioni è minore che per le correnti continue.

L'A. passa poi a considerare i tubi d'induzione nei conduttori, e comincia dal caso che essi si muovano nel dielettrico. Siano  $f, g, h$ , i numeri unitari dei tubi paralleli agli assi  $x, y, z$ , ossia le componenti dello spostamento elettrico, e supponiamo che i tubi si muovano con la velocità  $u, v, w$ .

L'aumento dovuto al passaggio dei tubi attraverso le faccie dell'elemento è

$$- \delta t \left( \frac{d}{dx} (fu) + \frac{d}{dy} (fv) + \frac{d}{dz} (fw) \right) dx dy dz ;$$

l'aumento dovuto alla deformazione dei tubi entro l'elemento è

$$\delta t \left( f \frac{du}{dx} + g \frac{du}{dy} + h \frac{du}{dz} \right) dx dy dz .$$

L'aumento totale di  $f$  nell'unità di tempo, è quindi

$$f \frac{du}{dx} + g \frac{du}{dy} + h \frac{du}{dz} - \left( \frac{d}{dx} (fu) + \frac{d}{dy} (fv) + \frac{d}{dz} (fw) \right)$$

che può scriversi sotto la forma

$$\frac{d}{dy} (gu - fv) - \frac{d}{dz} (fw - hu) - u \left( \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) ;$$

ed essendo

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho ,$$

chiamando  $\rho$  la densità dell'elettricità libera, si ha

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dy} (gu - fv) \frac{d}{dz} - (wf - uh) - u\rho$$

e similmente per le

$$\frac{dg}{dt} \text{ e } \frac{dh}{dt} .$$

E poichè  $\frac{df}{dt} + u\rho$  è la componente della corrente parallela all'asse delle  $x$ , e analogamente per le altre componenti, dal confronto dell'equazioni trovate con quelle che danno la relazione fra la densità della corrente e la forza magnetica, per le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  di questa si ha

$$\alpha = 4\pi(hv - gw)$$

e analogamente per  $\beta$  e per  $\gamma$ .

Segue da ciò che un tubo d'induzione in moto produce una forza magnetica, la cui direzione è normale al piano che contiene la direzione dell'induzione e quella del moto, e la cui grandezza è data dal prodotto di  $4\pi$  per la lunghezza del tubo d'induzione e per la componente ad esso normale della sua velocità.

L'A. ottiene poi la forza elettromotrice, ponendo nell'espressione dell'energia del campo magnetico, che è  $(x^2 + \beta^2 + \gamma^2) | 8\pi$ , i valori trovati per  $\alpha, \beta, \gamma$  e differenziando poi rispetto ad  $f, g, h$ . Si ha così per le componenti  $X, Y, Z$  i valori

$$X = w\beta - v\gamma \quad Y = u\gamma - wx \quad Z = vx - u\beta,$$

dai quali si deducono le ordinarie leggi dell'induzione.

Differenziando poi l'espressione dell'energia rispetto a  $x, y, z$ , l'A. ottiene le componenti di un "momento", che deve considerarsi per spiegare le azioni elettrodinamiche fra i conduttori percorsi da corrente. I tubi d'induzione, cioè, che penetrano in un conduttore, e che in certo modo si annullano in esso, cedono al conduttore il loro momento, e si manifesta perciò una forza elettrodinamica, perchè quella penetrazione non è simmetrica da tutte le parti.

Passando a trattare alcuni casi particolari con questa teoria, l'A. considera da prima una sfera carica di elettricità che si muova parallelamente a un asse, poi il campo magnetico che si forma attorno a una corrente circolare, poi la rotazione di un disco elettrizzato; e tratta in fine del caso in cui i tubi d'induzione si muovano in un mezzo magnetico, come per es. nel ferro e trova che una magnetizzazione superficiale del ferro corrisponde a una discontinuità nella velocità tangenziale dei tubi d'induzione.

H. LAMB. *Sulla flessione di una molla elastica piana.* — È una conseguenza della teoria della flessione che se una sbarra di sezione rettangolare è piegata da coppie opposte in un piano parallelo a una coppia di faccie, in modo da formare un arco circolare di raggio  $\rho$ , le altre faccie prendono una curvatura anti-elastica  $\sigma/\rho$ , essendo  $\sigma$  il rapporto fra la contrazione della sezione



e l'allungamento. Thomson e Tait hanno dedotto da ciò che se  $2b$  è la larghezza (normale al piano della flessione) e  $2h$  lo spessore della sbarra, perchè non ci sieno contraddizioni con le ipotesi che servono a stabilir le formule, bisogna che  $\rho$  sia molto grande di fronte a  $b^2/h$ . L'ipotesi fondamentale di quel calcolo è che la sezione media non subisca estensione.

L'A. costruisce una soluzione del problema pel caso, che  $h$  sia molto piccolo di fronte a  $b$ , e che vale per tutti i valori di  $b^2/h$ , ammettendo delle tensioni e delle contrazioni nella superficie media, tali che fanno in modo che la superficie media in nessuno dei suoi punti abbia una forma diversa da quella di un cilindro circolare. Il calcolo è analogo a quello che si riferisce alla flessione uniforme di una lastra cilindrica. I casi limiti in cui  $b^2/h$  è piccolissimo o grandissimo, danno le formule per una sbarra o per una lastra che sien piegate.

E. B. ROSA. *Sulla capacità specifica induttiva degli elettroliti.* — L'A. ha voluto studiare se i valori molto grandi trovati da Cohn e Arons per le costanti dielettriche dell'acqua e dell'alcole (*N. Cim.* 28, pag. 85), sien dovuti all'alta conduttività di quei corpi, oppure se tanto la conduttività quanto la capacità induttiva sien dovute ad alcune proprietà comuni di quei liquidi.

Il metodo usato fu di misurare la forza che si esercita fra due elettrodi uno fisso e uno mobile, situati in un recipiente ripieno di un elettrolita, variando la differenza di potenziale fra gli elettrodi, la loro distanza, il periodo dei potenziali alternanti adoperati, la temperatura dell'elettrolita e la sua conduttività (quest'ultima variavasi col cambiare la quantità del sale disciolto o dell'altre impurità). Gli elettroliti studiati furono l'acqua e l'alcole, che furon confrontati con l'aria, con la trementina e con altri dielettrici.

I risultati ottenuti sembrano mostrare che la forza elettrica sia affatto indipendente dalla conduttività del mezzo. Perciò, come si ha dalle esperienze di Cohn e Arons, è messa in evidenza una effettiva capacità specifica induttiva per i liquidi conduttori.

È noto che un dielettrico in un campo elettrico non uniforme tende a muoversi verso le regioni ove la forza è maggiore o minore, secondo che la costante dielettrica di quel corpo è maggiore o minore di quella del mezzo in cui si muove. Esperienze fatte dall'A. mostrano che il vetro sospeso nell'acqua tende a muoversi verso le parti meno intense del campo con una forza molto maggiore di quella con la quale tende a muoversi verso le parti più intense del campo nell'aria, e che a parità di altre

condizioni, quella forza è proporzionale al quadrato della forza elettrica.

Un conduttore invece si muove in qualunque mezzo sempre verso i punti ove l'intensità del campo è maggiore, e con molto maggior forza nell'acqua che nell'aria e nell'olio; e l'aumento della conduttività dell'acqua non cambia la forza elettrica.

G. M. MINCHIN. *Esperienze di fotoelettricità*. — L' A. descrive molte esperienze, simili a quelle del Becquerel, fatte già da molto tempo e continuate a lungo, collo scopo di trasmettere a distanza le immagini luminose. Questo scopo non è stato raggiunto; ma i risultati ottenuti sono assai interessanti; ma sarebbe troppo lungo riferirli qui dettagliatamente.

S. BIDWELL. *Alcune esperienze con le pile a selenio*. — L' A. ritiene che il selenio sia un coibente, e diventi un conduttore quando è riscaldato a contatto col rame, perchè allora si forma un seleniuro di rame, che è quello che rende il selenio sensibile alla luce. Le pile fatte con fili di rame avvolti su lamine di mica e spalmati di selenio, divengono a lungo andare ordinariamente insensibili alla luce, mentre la loro resistenza diminuisce molto. La resistenza di quelle che restan sensibili resta molto elevata; ma pel passaggio di forti correnti diminuiscono la resistenza da 6000 a 100 ohm, e contemporaneamente diventano insensibili.

Per mostrare gli effetti della luce sul selenio, l' A. propone di costruire un' elettrocalamita che contenga nel suo circuito una pila a selenio, e che serva a chiudere e ad aprire il circuito di una lampada a incandescenza alimentata da una batteria di pile. Sarebbe allora possibile far vedere come la lampada si accenda al buio e si spenga alla luce automaticamente.

J. MC. COWAN. *Sul riscaldamento dei conduttori colle correnti elettriche, e sulla distribuzione dell' elettricità nei conduttori in tal modo riscaldati*. — Quando un conduttore è riscaldato da una corrente elettrica, non si tratta soltanto di trovarne la temperatura per ogni punto, ma anche si deve determinare l' effetto che il riscaldamento ha sulla distribuzione del potenziale elettrico pel cambiamento che produce nella conduttività.

L' A. tratta questi problemi, e studia più specialmente lo stato definitivo, anzi che quello variabile, perchè ha maggior importanza.

Uno dei teoremi dimostrati è questo: Se due parti della superficie di un conduttore, nelle quali la conduttività termica  $K$  e quella elettrica  $c$  sono costanti, son mantenute ai potenziali  $V_1$ ,  $V_2$  e alle temperature  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ , mentre dal rimanente della

superficie non passa nè calore nè elettricità, allora nello stato permanente le superficie equipotenziali coincidono con quelle isothermiche, e la temperatura  $\vartheta$  in un punto qualunque dipende dal potenziale  $V$  di quel punto mediante la relazione

$$K\vartheta = \frac{1}{2}jc(V_2 - V)(V - V_1) + \frac{K[\vartheta_2(V - V_1) + \vartheta_1(V_2 - V)]}{V_2 - V_1}$$

essendo  $j$  il fattore che serve a ridurre la unità termica in unità assolute meccaniche. Questa equazione serve a trovare la temperatura massima che può raggiungere il conduttore, e che è indipendente dalla forma e dalla grandezza di esso e degli elettrodi.

A. SCUSTER. *Influenza della flessione degli aghi magnetici sull'inclinazione apparente.* — L' A. mostra che per determinare l'inclinazione magnetica è necessario adoprare aghi corti, secondo Joule al più di 5 pollici; perchè con aghi lunghi 8 pollici l'inclinazione apparisce minore del vero di circa un minuto.

T. H. BLAKESLEY. *Soluzione di un problema geometrico nel magnetismo.* — L' A. determina in qual punto il campo magnetico è normale all'asse di un magnete.

E. WIEDEMANN e H. EBERT. *Osservazioni alla Memoria del prof. Trowbridge « sul moto degli atomi nella scarica elettrica ».* — Gli A. fanno osservare che molto prima del Trowbridge (cfr. *N. Cim.* 30, pag. 177) avevano dimostrato che i gas luminosi e le molecole dei vapori nelle scariche elettriche, non hanno moti traslatori straordinariamente grandi nel senso della corrente, e che il loro metodo è circa 200 volte più esatto di quello del Trowbridge.

J. CONROY. *Sul cambiamento dello spettro d'assorbimento del cobalto prodotto dal calore.* — Quando un vetro di cobalto è scaldato in un bruciatore Bunsen, la zona d'assorbimento nel rosso si sposta verso le parti meno rifrangibili dello spettro; le zone nel giallo e nel verde non si spostano, ma divengono meno decise. Col raffreddamento si ottiene lo spettro primitivo.

A. ANDERSON. *Sui coefficienti d'induzione.* — Il metodo usato dall' A. è simile a quello del Maxwell; ma non è un metodo di zero, e anzi, quantunque non sia assolutamente necessario, è utile che sia usato con un galvanometro balistico.

A

Nel ramo BC del ponte D B di Wheatstone è situato il  
C

rocchetto di cui si vuol misurare l'autoinduzione, e la cui resistenza sia R. Un polo di un condensatore è unito a D, l'altro a un pozzetto  $r$  di mercurio. Altri due pozzetti  $G_1$  e  $G_2$  formano

i capi del galvanometro, e  $p, q, s$  sono altri pozzetti uniti rispettivamente ai vertici A, B, C del ponte. Un opportuno commutatore può unire  $G_1$  con  $p$  e  $G_2$  con  $q$ , ovvero  $G_1$  con  $r$  e  $G_2$  con  $s$ , ponendo il galvanometro nel primo caso nel ramo AC, e nel secondo nel ramo DB del condensatore. I rami AB e AD sono senza induzione, ed hanno la medesima resistenza  $b$ , e la resistenza di DC, che è pure senza induzione, si aggiusta in modo da ottenere l'equilibrio.

Chiudendo il circuito della pila che fa capo in D e in B, quando il galvanometro è nel ramo AC, si avrà una certa deviazione: se poi si chiude quando il galvanometro è nel ramo BD, e si aggiusta la capacità K del condensatore finchè la deviazione non è la stessa, si ha pel coefficiente L d'autoinduzione

$$L = 2KR(b + 2G + R)$$

essendo G la resistenza del galvanometro.

L' A. indica anche altri metodi, che servono anche come metodi di zero, e per determinare anche il coefficiente d'induzione mutua di due rocchetti.

T. H. BLAKESLEY. *Nuove contribuzioni alla dinamometria.* — Non è possibile un breve sunto di questa Nota, nella quale l' A. indica come si possa usare un elettrodinamometro nei circuiti dei trasformatori, per misurare l'energia somministrata.

W. N. HARTLEY. *Sulle relazioni fra le linee dei diversi spettri.* — L' A. replica alle osservazioni che l' Ames (cfr. *N. Cim.* 30, pag. 164) fece anche alle conclusioni cui era giunto relativamente alle proprietà delle linee spettrali.

W. W. J. NICOL. *Sulla reciproca solubilità dei sali nell' acqua.* — Dopo aver parlato di quanto è stato studiato fin qui sulla influenza che alcuni sali esercitano sulla solubilità di altri, l' A. espone le esperienze che ha fatto in proposito.

Da prima ha trovato che dei seguenti sali di cui specialmente si è occupato, se ne sciolgono in 100 parti d' acqua a 20° C:

NaCl 35,905; KCl 34,52; NaNO<sub>3</sub> 87,65; KNO<sub>3</sub> 31,11.

Fu poi studiata la solubilità del

KCl nel NaCl      NaNO<sub>3</sub> nel NaCl

KCl » KNO<sub>3</sub>      NaNO<sub>3</sub> » KNO<sub>3</sub>

e viceversa, eliminando così le azioni chimiche e la formazione dei sali doppi; ed ogni volta fu determinata la quantità di sale misto per ogni 100 parti d' acqua della soluzione.

I risultati ottenuti posson rappresentarsi mediante formule empiriche, o mediante opportune curve

H. M. VERNON. *Sul massimo di densità dell'acqua.* — La sola spiegazione che può darsi del fenomeno che presenta l'acqua, è, secondo l'A., che a circa 4° l'assetto molecolare dell'acqua subisca qualche modificazione; e sarebbe perciò probabile che a tal temperatura si avesse anche qualche fenomeno termico.

Per studiar questo, l'A. lasciò raffreddare lentamente fino a 0° una certa quantità d'acqua scaldata a 30°; e prendendo la temperatura di essa di tempo in tempo, costruì una curva che in prossimità di 4° presenta un andamento irregolare se si lascia in riposo l'acqua, e quindi si permettono i moti convettivi dovuti alle differenze di densità che si manifestano; se l'acqua è agitata, la curva è molto più regolare.

L'A. osserva che il cambiamento di densità dell'acqua, che è accompagnato da evoluzione di calore, può esser dovuto soltanto a un diverso aggruppamento delle sue molecole, che formano molecole più complesse di quelle che esistevano prima. Si vede perciò che le molecole ordinarie dell'acqua son quelle che hanno la densità massima, quelle che son più complesse sono più leggere, e quelle del ghiaccio, che deve contenere molecole ancor più complesse, sono ancora più leggere. L'A. termina accennando ai cambiamenti che questi diversi aggruppamenti molecolari producono anche nel calore specifico dell'acqua.

C. BARUS. *Confronto dei manometri di Bourdon, di Tait e di Amagat per le alte pressioni.* — In occasione dei suoi studi sulle isometriche dei liquidi, l'A. aveva osservato che le indicazioni dei manometri di Bourdon e di Tait conservavano un rapporto costante per pressioni crescenti, ma non per quelle decrescenti dopo che era stata raggiunta una pressione elevata (1000 atm.). Egli ha voluto perciò confrontare i due anzidetti manometri con quello "a stantuffi liberi", dell'Amagat; e ha trovato che la divergenza è dovuta a delle modificazioni molecolari che subisce il manometro di Bourdon, e che si presentano per pressioni comprese fra 500 e 1000 atm.

L. R. WILBERFORCE. *Sul calcolo del coefficiente di viscosità di un liquido, dedotto dalla velocità del suo efflusso da un tubo capillare.* — L'A. osserva che in quel calcolo bisogna tener conto del moto che il liquido possiede anche fuori del tubo, e della differenza di carattere che il moto del liquido ha nei punti vicini alle estremità, da quello che ha negli altri punti. Egli mostra come il termine di correzione introdotto da Hagenbach, per tener conto della prima causa, non sia esatto; e che invece di

togliere  $\frac{1}{\sqrt[5]{2}} \frac{v^2}{g}$  come indicò Hagenbach, bisogna togliere soltanto

$\frac{v^2}{g}$  dall'altezza che misura la pressione sotto la quale avviene l'efflusso.

I valori del coefficiente di viscosità, dedotti dai calcoli di Hagenbach così corretti, sono certamente migliori; ma è necessario poter eseguire anche l'altra correzione, ciò che è impossibile in modo completo. L'A. calcola i coefficienti di viscosità correggendo opportunamente i risultati trovati da Poiseuille, ma non trova valori pienamente soddisfacenti, quantunque i valori ottenuti da Poiseuille sieno assai concordanti; ma l'A. ritiene che i confronti finali fossero eseguiti da Poiseuille su risultati poco numerosi, e la cui concordanza poteva esser fortuita.

S. LUPTON. *Sul calcolo dei risultati sperimentali con speciale riguardo alla teoria degli idrati in soluzione.* — L'A. mostra come in generale le formule teoriche o quelle empiriche si prestino meglio delle curve a rappresentare i risultati sperimentali; e discutendo le esperienze e i risultati del Pickering giunge alla conclusione che la teoria degli idrati, se non si può dire assolutamente errata, non è nemmeno dimostrata vera in modo inconfutabile.

### *Elenco delle Opere pubblicate dal Prof. ENRICO BETTI.*

#### **Annali di Scienze Fisiche e Matematiche.**

1. Sopra la determinazione analitica dell'efflusso dei liquidi per una piccolissima apertura. Tomo I.
2. Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo. Tomo II.
3. Un teorema sulle risolventi dell'equazioni risolubili per radicali. Tomo II.
4. Sulla risoluzione dell'equazioni algebriche. Tomo III.
5. Sopra l'abbassamento dell'equazioni modulari delle funzioni ellittiche. Tomo IV.
6. Un teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche. Tomo V.
7. Sopra la teoria delle sostituzioni. Tomo VI.
8. Sopra la più generale funzione algebrica che può soddisfare un'equazione, il grado della quale è potenza d'un numero primo. Tomo VI.
9. Sopra le forme omogenee a due indeterminate. Tomo VII.
10. Sopra le serie doppie ricorrenti. Tomo VIII.

#### **Annali di Matematica pura ed applicata.**

11. Sopra l'equazioni algebriche con più incognite. Tomo I.
12. Sopra i covarianti delle forme binario. Tomo I.

13. Sopra le funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più equazioni algebriche Tomo I.
14. Sopra i combinanti. Tomo I.
15. Sopra la teoria generale delle superficie curve. Tomo III.
16. La teoria delle funzioni ellittiche e sue applicazioni. Tomi III, IV.

**Annali di Matematica pura ed applicata. (Serie II).**

17. Sopra le funzioni sferiche. Tomo I.
18. Sopra le temperature variabili di una lastra terminata. T. I.
19. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Tomo IV.
20. Sopra l'equazioni d'equilibrio dei corpi solidi elastici. Tomo VI.
21. Sopra il moto di un numero qualunque di punti che si attraggono o si respingono tra loro. Tomo VIII.
22. Sopra i sistemi tripli di superficie isoterme e ortogonali. Tomo VIII.
23. Sopra i moti che conservano la figura ellissoidale a una massa fluida eterogenea. Tomo X.

**Annali delle Università Toscane. (Pisa)**

24. Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa. Tomo VII.
25. Memoria sopra la teoria della capillarità. Tomo IX.
26. Alcune determinazioni (Sopra la determinazione delle temperature variabili d'un cilindro. Tomo IX \*).

**Nuovo Cimento.**

**(Serie I).**

27. La teoria delle forze che agiscono secondo la legge di Newton e sue applicazioni all'elettrostatica. Tomi XVIII, XIX, XX.
28. Teoria della capillarità. Tomo XXVI.
29. Sopra la elettrodinamica. Tomo XXVII.
30. Sopra la determinazione delle temperature variabili in una lastra terminata quando la conducibilità non è eguale in tutte le direzioni. Tomo XXVIII.

**(Serie II).**

31. Sopra la distribuzione delle correnti elettriche in una lastra rettangolare. Tomo III.
32. Teoria dell'elasticità. Tomi VII, VIII, IX, X.
33. Un teorema sulle funzioni potenziali. Tomo XII.

**(Serie III).**

34. Sopra il potenziale di un sistema di conduttori isolati carichi di elettricità e di coibenti elettrizzati comunque. Tomo II.
35. Sopra la teoria dei condensatori. Tomo V.
36. Sopra il moto dei fluidi elastici. Tomo XIV.

**Giornale di matematiche. (Napoli).**

37. Ottaviano Fabrizio Mossotti — Necrologia. Tomo I.
38. Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa definite da un'equazione di 3° grado. Tomo III.

**Memorie della Società Italiana delle Scienze. (in Firenze — Serie III, Parte II).**

39. Sopra la determinazione delle temperature nei corpi solidi ed omogenei. Tomo I.

\*) La Memoria porta ambedue i titoli.

**Atti della Reale Accademia dei Lincei.****(Serie II).**

40. Sopra la funzione potenziale d' un ellisse omogenea. Vol. II, Parte II, (*Memorie*).

**(Serie III, Transunti).**

41. Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti. Tomo I.  
 42. Sopra una estensione dei principii generali della dinamica. Tomo II.  
 43. Sopra il moto di un ellissoide fluido eterogeneo. Tomo V. (*Riprodotta nel Nuovo Cimento Serie III, Tomo IX*).

**(Serie IV, Rendiconti).**

44. Sopra la entropia di un sistema Newtoniano in moto stabile. Tomo IV.  
 45. Sopra la entropia di un sistema Newtoniano in moto stabile. Nota II, Tomo IV.  
 46. Sopra un teorema di Meccanica. Tomo VII.

**Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino.**

47. Teorema di Elettricità statica. Tomo I.

**Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.**

48. Sopra una estensione della terza legge di Keplero. Tomo II.

**Collectanea mathematica inedita, (in memoriam Dominici Chelini), (Milano 1881).**

49. Sopra la propagazione del calore.

**Journal fur di reine und angewandte Mathematik. (in Berlino).**

50. Sur les fonctions symétriques des racines des équations. Tomo LIV.

**Quarterly Journal of Mathematics. (in Londra).**

51. Extrait from letter of Sig. E. Betti to M. Sylvester. T. I.

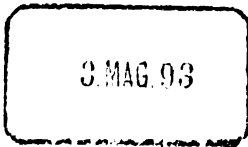
**Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences. (in Parigi).**

52. Sur les résolutions par radicaux des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier. Tome XLVIII.  
 53. Sur les substitutions de six lettres. Tome LXIII.

**Proceedings of the London Mathematical Society.**

54. On the Motion of an Elastic Solid strained by Extraneous Forces. T. XX, N. 358.

- 
55. Teorica delle forze Newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al Magnetismo Pisa - Nistri 1879. (La traduzione tedesca di questo libro porta il titolo: Lehrbuch d. Potentialtheorie und ihre Anwend. d. Electrostatik und Magnetismus Uebers. v. W. F. Meyer. Stuttg. 1886).





SUNTI di A. STEFANINI. — M. Ziloff. Sulla propagazione delle onde elettriche nei fili . . .	176
I. Klemencic. Sul contegno del ferro verso le oscillazioni elettriche . . .	177
<b>Philosophical Magazine. — Vol. 31, 1891.</b>	
J. H. Gladstone e G. Gladstone. Refrazione e dispersione del fluorobenzene e dei composti analoghi . . .	ivi
C. Barus. L'equilibrio chimico dei solidi, in relazione colla pressione e colla temperatura . . .	178
C. V. Boys, A. E. Briscoe e W. Watson. Sulla misura della radiazione elettromagnetica . . .	ivi
F. J. Smith. Misura del tempo della magnetizzazione di un cilindro di ferro . . .	ivi
A. Schuster. Teoria elementare dei fenomeni di refrazione . . .	179
Lord Rayleigh. Sulla fotografia con un foro sottile . . .	ivi
T. Preston. Il problema del contegno del campo magnetico attorno a un magnete girevole . . .	180
J. Swinburne. Sui condensatori per correnti alternate . . .	ivi
S. P. Thompson. Sull'uso dello spato fluore negli strumenti ottici . . .	ivi
E. L. Nichols. Sull'arco elettrico alternativo fra una sfera e una punta . . .	ivi
J. J. Thomson. Conduttività dei gas . . .	181
S. Bidwel. Esperienza da lezione per mostrare l'azione del calore sulla suscettibilità magnetica del nichel . . .	ivi
J. J. Thomson. Sulla rappresentazione delle proprietà del campo elettrico, per mezzo dei tubi d'induzione elettrostatici . . .	ivi
H. Lamb. Sulla flessione di una molla elastica piana . . .	184
E. B. Rosa. Sulla capacità specifica induttiva degli elettroliti . . .	185
G. M. Minchin. Esperienze di fotoelettricità . . .	186
S. Bidwell. Alcune esperienze con le pile a selenio . . .	ivi
J. Mc. Cowan. Sul riscaldamento dei conduttori colle correnti elettriche, e sulla distribuzione dell'elettricità nei conduttori in tal modo riscaldati . . .	ivi
A. Scuster. Influenza della flessione degli aghi magnetici sull'inclinazione apparente . . .	187
T. H. Blakesley. Soluzione di un problema geometrico nel magnetismo . . .	ivi
E. Wiedemann e H. Ebert. Osservazioni alla Memoria del Prof. Trowbridge — Sul moto degli atomi nella scarica elettrica — . . .	ivi
J. Conroy. Sul cambiamento dello spettro d'assorbimento del cobalto prodotto dal calore . . .	ivi
A. Anderson. Sui coefficienti d'induzione . . .	ivi
T. H. Blakesley. Nuove contribuzioni alla dinamometria . . .	188
W. N. Hartley. Sulle relazioni fra le linee dei diversi spettri . . .	ivi
W. W. J. Nicol. Sulla reciproca solubilità dei sali nell'acqua . . .	ivi
H. M. Vernon. Sul massimo di densità dell'acqua . . .	189
C. Barus. Confronto dei manometri di Bourdon, di Tait e di Amagat per le alte pressioni . . .	ivi
L. R. Wilberforce. Sul calcolo del coefficiente di viscosità di un liquido, dedotto dalla velocità del suo efflusso da un tubo capillare . . .	ivi
S. Lupton. Sul calcolo dei risultati sperimentali con speciale riguardo alla teoria degli idrati in soluzione . . .	190
Elenco delle Opere pubblicate dal Prof. Enrico Betti . . .	ivi



## PATTI D'ASSOCIAZIONE

---

Del NUOVO CIMENTO si pubblica ogni mese un fascicolo di tre fogli di stampa.

Le associazioni sono obbligatorie per un anno, e gli Associati, che per la fine di Dicembre non avranno disdetta l'associazione, s'intendono obbligati per l'anno successivo.

Il prezzo d'associazione per l'intero anno è fissato come segue:

Per il Regno Italiano, franco al destino it. L. 10. 50

Per l'Estero, come sopra . . . . . » 12. —

Le lettere relative a dimande di associazioni, a pagamenti ed a tutto ciò che riguarda l'amministrazione del Giornale, devono essere dirette, franche di Posta, a Pisa, al gerente *P. Salvioni*. — *Tipografia Pieraccini*.

---

Ciò che riguarda la direzione scientifica del Giornale potrà esser diretto a Pisa al Prof. *R. Felici* o al Prof. *V. Volterra*.

---



(Conto corrente con la Posta)

Si pubblica una volta al mese.

1892. Fascicolo 11. e 12.

# IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATA PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

da R. FELICI e V. VOLTERRA

**Terza serie Tomo XXXII.**

NOVEMBRE e DICEMBRE

Pubblicato il 28 Febbraio 1893



**1892**

**PISA**

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

# INDICE

Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per date forze applicate sulla superficie — Nota del Prof. Valentino Cerruti . . . . .	pag. 193
Sulla variabilità del calore specifico dell'acqua fra 0° e + 32° — Memoria dei Proff. A. Bartoli ed E. Stracciati ( <i>Continuaz. e fine</i> ) . . . . .	" 215
Intorno ad alcune modificazioni dell'elettrometro a quadrante del Thomson — Nota del Prof. Emilio Villari . . . . .	" 239
Risultati delle misure per la costruzione della carta magnetica della Svizzera — A. Battelli . . . . .	" 250

## RIVISTA

SUNTI di A. BARTORELLI. — *Comptes Rendus*, (1. semestre 1892).

A. Potier. Sull'assorbimento della tormalina . . . . .	" 258
Le Verrier. Sul calore specifico dei metalli . . . . .	" ivi
A. Crova. Sulla misura ottica delle alte temperature . . . . .	" 259
G. Lippmann. Sulla fotografia dei colori . . . . .	" ivi
C. Maltézos. Misura diretta e indiretta dell'angolo di raccordamento di un liquido che non bagna il vetro . . . . .	" 260
H. Bagard. Sui fenomeni termoelettrici al contatto di due elettroliti . . . . .	" 261
A. Chassy. Sulle leggi dell'elettrolisi . . . . .	" ivi
H. Poincaré. Sulla propagazione delle oscillazioni hertziane . . . . .	" 262
C. Limb. Sulla determinaz. del momento della coppia di torsione di una sospensione unifilare . . . . .	" ivi
E. H. Amagat. Sulla determinazione della densità dei gas liquefatti e dei loro vapori saturi. — Elementi del punto critico dell'acido carbonico . . . . .	" 263
H. Poincaré. Sulla propagazione delle oscillazioni elettriche . . . . .	" 264
R. Pictet. Studio dei fenomeni fisici e chimici sotto l'influenza delle temperature molto basse . . . . .	" 265
E. H. Amagat. Sulla densità dei gas liquefatti e dei loro vapori saturi, e sulle costanti del punto critico dell'acido carbonico . . . . .	" ivi
A. Berget. Metodo ottico per determinare la conducib. termica delle sbarre metalliche, . . . . .	" 265
E. Jannettaz. Sulla propagazione del calore nei corpi cristallizzati. . . . .	" 267
H. Abraham. Sopra una nuova determinazione del rapporto $e$ fra le unità C. G. S. elettromagnetiche ed elettrostatiche . . . . .	" ivi
A. Vaschy. Sulle considerazioni di omogeneità in Fisica . . . . .	" ivi
E. Bouty. Sulla coesistenza del potere dielettrico e della conducibilità elettrolitica . . . . .	" ivi
Moessard. Sul metodo di Doppler-Fizeau . . . . .	" 268
A. Vaschy. Esame della possibilità di una azione reciproca fra un corpo elettrizzato ed una calamita . . . . .	" ivi

SULLA DEFORMAZIONE DI UNA SFERA OMOGENEA ISOTROPA PER DATE FORZE APPLICATE SULLA SUPERFICIE <sup>1)</sup>); NOTA DEL PROF. VALENTINO CERRUTI.

In una breve Nota comunicata al Congresso dell'Associazione francese per il progresso delle Scienze tenutosi in Grenoble nell'agosto dell'anno passato ho esposto il calcolo della deformazione prodotta in una sfera omogenea isotropa da spostamenti arbitrariamente impressi a' punti della superficie; completo ora il mio studio coll'analisi del caso in cui i punti della superficie si suppongono soggetti a date forze esterne. Il metodo di ricerca è quello stesso del quale mi sono già servito in altre pubblicazioni e che ho delineato nella mia Memoria dal titolo: *Ricerche intorno all'equilibrio de' corpi elastici isotropi* <sup>2)</sup>; pertanto a questa Memoria rimando per la dichiarazione tanto del metodo quanto di que' simboli di cui non si richiamasse qui esplicitamente il significato, come pure rimando alla Nota che ho letto a Grenoble per la dimostrazione di alcune trasformazioni delle quali mi giovo nel corso di questo lavoro.

1.° Assunto il centro O della sfera come origine di una terna di assi rettangolari, accenno con  $r, R$  le distanze di un punto variabile  $x, y, z$  dal centro della sfera e da un altro punto  $O_1 (x_1, y_1, z_1)$  fisso ma scelto a piacere nell'interno della sfera stessa, e comincio col calcolare gli spostamenti  $\xi, \eta, \zeta$ , del punto  $x, y, z$  quando soltanto in superficie (cioè solo per  $r = a$  raggio della sfera) agiscano forze e queste riferite all'unità di superficie abbiano rispetto agli assi le componenti

$$(1) \quad 2\varrho\omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{d}{dr} \frac{1}{R}, \quad 2\varrho\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{d}{dr} \frac{1}{R}, \quad 2\varrho\omega^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{d}{dr} \frac{1}{R}.$$

A determinare compiutamente il problema aggiungerò an-

1) Estratto da' Rendiconti della r. Acc. de' Lincei, t. 2°, 1° semestre, p. 461-469, 586-592.

2) Acc. r. de' Lincei. Memorie della Classe di Sc. fis. mat. e nat. Serie 3ª, t. XIII, p. 81-122.

cora la condizione che sieno impediti gli spostamenti possibili per la sfera supposta irrigidita. Le forze (1) costituiscono un sistema di forze in equilibrio e la deformazione da esse generata, simmetrica rispetto alla retta  $OO_1$ , avviene in piani passanti per questa retta e l'asse della rotazione elementare di una particella qualunque è perpendicolare al piano che la congiunge con  $OO_1$ . Perciò la condensazione cubica  $\mathfrak{S}$  e il doppio  $\tau$  della rotazione riusciranno funzioni soltanto di  $r$  e di  $\alpha x + \beta y + \gamma z$ , essendo  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni di direzione di  $OO_1$ . D'altra parte, detta  $t$  la distanza del punto  $x, y, z$  dalla  $OO_1$ , per un teorema noto <sup>1)</sup> le due funzioni  $\Omega^2 \mathfrak{S}$ , ed  $\omega^2 t \tau$  costituiscono una coppia di funzioni *potenziale* ed *associata*, ed in conseguenza

$$t\tau = \text{cost.} + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \int t \left( r \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial r} d\phi - \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \phi} \frac{dr}{r} \right),$$

ove per compendio si faccia

$$\cos \phi = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r}.$$

Prendasi una funzione  $H$ , simmetrica rispetto ad  $OO_1$ , finita continua e ad un sol valore entro lo spazio occupato dalla sfera e soddisfacente in questo spazio alla  $\Delta^2 = 0$ , e pongasi ipoteticamente

$$(2) \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r H}{\partial r};$$

anche la  $\mathfrak{S}$  godrà delle stesse proprietà che la  $H$ . Ne consegue

$$t\tau = \text{cost.} - \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} t \frac{\partial H}{\partial \phi};$$

ma  $\tau$  deve restare finita dappertutto entro la sfera, dunque la costante sarà nulla e si avrà semplicemente

$$\tau = - \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial H}{\partial \phi},$$

<sup>1)</sup> Vedi *l. c.*, p. 97.



da cui per le componenti  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  della  $\tau$  secondo gli assi si cavano le espressioni

$$(3) \quad \tau_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( z \frac{\partial H}{\partial y} - y \frac{\partial H}{\partial z} \right), \quad \tau_2 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( x \frac{\partial H}{\partial z} - z \frac{\partial H}{\partial x} \right), \\ \tau_3 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( y \frac{\partial H}{\partial x} - x \frac{\partial H}{\partial y} \right).$$

2.° Con ciò le equazioni indefinite per l'equilibrio assumeranno la forma seguente:

$$(4) \quad \Delta^2 \xi + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot r H = 0, \quad \Delta^2 \eta + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot r H = 0, \\ \Delta^2 \zeta + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot r H = 0.$$

Se poi si riflette che le espressioni come  $\tau_1 \frac{dy}{dn} - \tau_2 \frac{dz}{dn}$  si riducono ad

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( x \frac{\partial H}{\partial r} - r \frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

od anche ad

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot r H - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \cdot r H \right),$$

e che, posto

$$T^2 = a^4 - 2a^2 (xx_1 + yy_1 + zz_1) + (x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2),$$

per  $r = a$  sussistono tre relazioni del tipo

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T}$$

si avranno ai limiti la equazione

$$(5) \quad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} + 2 \frac{d\xi}{dr} - \frac{1}{\pi} \frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot r H \\ + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \cdot r H = 0$$

e le altre due che se ne ricavano, mutando successivamente  $w, x_1, \xi$  in  $y, y_1, \eta; z, z_1, \zeta$ .

Facciasi

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$$

e impongansi alle  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  le condizioni di mantenersi nell'interno della sfera finite, continue, ad un sol valore, di soddisfare ivi alla  $\Delta^2 = 0$  e in superficie alle equazioni

$$(6) \quad \frac{d\xi_1}{dr} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} = 0, \quad \frac{d\eta_1}{dr} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} = 0, \quad \frac{d\zeta_1}{dr} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} = 0;$$

queste tre funzioni esistono, atteso che come si verifica facilmente <sup>1)</sup>,

$$\int_s \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} ds = 0, \quad \int_s \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} ds = 0, \quad \int_s \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} ds = 0$$

e sono determinate salvo una costante. Ma  $r \frac{d\xi_1}{dr}, r \frac{d\eta_1}{dr}, r \frac{d\zeta_1}{dr}$  saranno anch'esse come lo sono  $a \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T}, \dots$  funzioni che nell'interno della sfera godono delle medesime proprietà che le  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ , e siccome in superficie a causa delle (6) si ha

$$(6') \quad r \frac{d\xi_1}{dr} + a \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} = 0, \quad r \frac{d\eta_1}{dr} + a \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} = 0, \\ r \frac{d\zeta_1}{dr} + a \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} = 0$$

queste equazioni per una proprietà conosciuta delle funzioni potenziali sussisteranno in tutto lo spazio occupato dalla sfera: potremo quindi prendere

$$\xi_1 = -a \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \chi + \int \frac{dr}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{r}{T} \right) = \frac{\partial J}{\partial x_1},$$

1) Ciò che d'altronde si doveva prevedere, perchè le forze (1), come già s'è detto, costituiscono un sistema di forze in equilibrio.



dove  $J = -a \left( \chi + \frac{1}{T} + \int \frac{dr}{rT} \right)$  e  $\chi$  una funzione delle sole  $x, y, z$  che si determinerà in modo che la funzione  $J$  si conservi finita e continua nello spazio occupato dalla sfera. Poichè si ha  $\int \frac{dr}{rT} = -\frac{1}{a^2} \log \frac{T+a^2-xx_1-yy_1-zz_1}{r}$  è chiaro che basta prendere  $\chi = C - \frac{\log r}{a^2}$ , dove  $C$  è una costante assolutamente arbitraria. Per ragione di simmetria assumeremo  $C = -\frac{1}{a^2}$  e con ciò

$$J = -a \left[ \frac{1}{T} - \frac{1}{a^2} + \int_0^r \frac{dr}{r} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{a^2} \right) \right].$$

Analogamente si avrà

$$(7) \quad \eta_1 = \frac{\partial J}{\partial y_1}, \quad \xi_1 = \frac{\partial J}{\partial z_1}.$$

Per le  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  porremo

$$(8) \quad \xi_2 = -\frac{x}{2\pi} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r}, \quad \eta_2 = -\frac{y}{2\pi} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r}, \quad \zeta_2 = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r},$$

onde le  $\xi_3, \eta_3, \zeta_3$  dovranno in tutta la sfera soddisfare alle equazioni

$$\Delta^2 \xi_3 = 0, \quad \Delta^2 \eta_3 = 0, \quad \Delta^2 \zeta_3 = 0$$

ed in superficie a tre altre equazioni del tipo

$$2 \frac{d\xi_3}{dr} - \frac{x}{\pi} \frac{\partial^2 \cdot rH}{\partial r^2} - \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x}{r} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot rH}{\partial x} = 0.$$

Ma  $r \frac{d\xi_3}{dr}, r \frac{d\eta_3}{dr}, r \frac{d\zeta_3}{dr}$  soddisferanno pure entro la sfera alla  $\Delta^2 = 0$ , quindi posto per compendio

$$S = (\Omega^2 - \omega^2) r \frac{\partial^2 \cdot rH}{\partial r^2} + (\Omega^2 + \omega^2) \frac{\partial \cdot rH}{\partial r} - \Omega^2 H,$$

$$e^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

e detti  $H', S'$  i valori di  $H, S$  per  $x = x', y = y', z = z'$ , ne verrà

$$r \frac{d\xi_3}{dr} = \frac{a^2 - r^2}{8\pi^2 a (\Omega^2 - \omega^2)} \int_0^r \left( x' S' - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H'}{\partial x'} \right) \frac{ds}{e^3}.$$

Ma per essere  $S$  e  $\frac{\partial H}{\partial x}$  funzioni potenziali, si avrà

$$\frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int_0^r \left( x S' - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H'}{\partial x'} \right) \frac{ds}{e^3} = x S - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\int_0^r \frac{S' ds}{e} = \frac{2\pi a}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{S dr}{\sqrt{r}},$$

quindi

$$r \frac{d\xi_3}{dr} = \frac{a^2 - r^2}{4\pi (\Omega^2 - \omega^2)} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{S dr}{\sqrt{r}} + \frac{1}{2\pi (\Omega^2 - \omega^2)} \left( x S - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H}{\partial x} \right),$$

e di seguito

$$\xi_3 = \frac{1}{4\pi (\Omega^2 - \omega^2)} \int_0^r dr \frac{a^2 - r^2}{r} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{S dr}{\sqrt{r}} + \frac{1}{2\pi (\Omega^2 - \omega^2)} \int_0^r \frac{dr}{r} \left( x S - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H}{\partial x} \right).$$

Ora con riduzioni e trasformazioni assai facili si ottiene

$$\int_0^r \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dr}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( r \int_0^r \frac{H dr}{r^2} \right),$$

$$\int_0^r \frac{x S dr}{r} = \frac{x}{r} \int_0^r S dr = (\Omega^2 - \omega^2) x r \frac{\partial H}{\partial r} + (\Omega^2 + \omega^2) x H - \Omega^2 \frac{x}{r} \int_0^r H dr,$$

$$\int_0^r \frac{dr}{r} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{S dr}{\sqrt{r}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\Omega^2 - \omega^2) H + 2\Omega^2 r \int_0^r \frac{H dr}{r^2} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}} \right],$$

$$\int_0^r r dr \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{S dr}{\sqrt{r}} = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\Omega^2 - \omega^2) H + \frac{2\Omega^2}{r} \int_0^r H dr - \frac{3(\Omega^2 - \omega^2)}{2\sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}} \right];$$

onde, quando per brevità si ponga

$$P = 2H + \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}}, \quad Q = 2H - \frac{3}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}},$$

verrà

$$(9) \quad \xi_3 = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} xH + \frac{\omega}{2\pi} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r} - \frac{r}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^r H dr \\ + \frac{1}{8\pi} \left( a^2 \frac{\partial P}{\partial x} - r^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

Raccogliendo i valori trovati per  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  risulta finalmente

$$(10) \quad \xi = \frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} xH - \frac{r}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^r H dr \\ + \frac{1}{8\pi} \left( a^2 \frac{\partial P}{\partial x} - r^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

espressione non la più semplice che si possa avere per  $\xi$ , ma la più appropriata per gli sviluppi ulteriori. Col cambiare  $x, x_1$  in  $y, y_1$  e  $z, z_1$  successivamente, si passa dall'espressione di  $\xi$  a quelle di  $\eta$  e  $\zeta$ .

3.° La funzione  $H$  tuttora incognita si caverà dalla relazione

$$9 = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r}.$$

Tenendo presente che  $H, \frac{1}{r} \int_0^r H dr, P, Q$  nello spazio occupato dalla sfera soddisfano alla  $\Delta^2 = 0$ , si deduce

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial x_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial y \partial y_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial z_1} - \frac{1}{2\pi} \frac{3\Omega^2 - 4\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} H \\ + \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r} - \frac{r}{4\pi} \frac{\partial Q}{\partial r}.$$

Ma

$$\frac{r}{4\pi} \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} (rH) - \frac{5H}{4\pi} + \frac{3}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}},$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial x_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial y \partial y_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial z_1} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega^2 - 3\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} H - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} (rH) \\ - \frac{3}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}} = 0. \end{aligned}$$

Se si pone per compendio

$$G = \frac{r}{T} + 2r \frac{d}{dr} \frac{r}{T},$$

qualora si osservi che

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{r}{T} = \frac{x}{a} \left( -\frac{1}{T_1} + 2 \frac{d}{dr} \frac{r}{T} \right) - \frac{r^2}{a} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T},$$

dall'espressione trovata per J (v. eq. 7) si cava facilmente

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial x_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial y \partial y_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial z_1} = -\frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial r} (rG),$$

per cui sostituendo

$$\frac{\Omega^2 - 3\omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} H \sqrt{r} + \sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) + \frac{3}{4} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}} + \frac{2\pi}{a\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial r} (rG) = 0,$$

equazione la quale derivata prima rispetto ad  $r$  e poi moltiplicata per  $\sqrt{r}$  ci dà quest'altra

$$\begin{aligned} (11) \quad r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rH) + \frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (rH) + \frac{\Omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} H \\ + \frac{2\pi}{a} \sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial r} (rG) \right) = 0, \end{aligned}$$

che ci servirà a determinare  $H$  o meglio  $rH$ .

L'equazione

$$(11') \quad r^2 \frac{\partial^2 rH}{\partial r^2} + \frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} r \frac{\partial rH}{\partial r} + \frac{\Omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} rH = 0$$

ha per integral generale

$$C' r^{\varepsilon'} + C'' r^{\varepsilon''},$$

dove  $C'$ ,  $C''$  sono quantità indipendenti da  $r$  <sup>1)</sup> ed  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  le due radici dell'equazione di secondo grado

$$\varepsilon^2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \varepsilon + \frac{\Omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} = 0.$$

Facciasi per brevità

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2\Omega^2 - 2\Omega^2\omega^2 - \omega^4}}{2(\Omega^2 - \omega^2)}.$$

si avrà

$$\varepsilon'' = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \sqrt{-1}$$

e l'integral generale della (11') assumè la novella forma

$$r^{\varepsilon_1} \left[ C' r^{\varepsilon_2 \sqrt{-1}} + C'' r^{-\varepsilon_2 \sqrt{-1}} \right],$$

da cui col solito procedimento si passa all'integral generale della (11), e si trova così

$$H = r^{\varepsilon_1 - 1} \left( C' r^{\varepsilon_2 \sqrt{-1}} + C'' r^{-\varepsilon_2 \sqrt{-1}} \right) - \frac{\pi r^{\varepsilon_1 - 1}}{a \varepsilon_2 \sqrt{-1}} \left| \begin{array}{l} r^{\varepsilon_2 \sqrt{-1}} \int_0^r r^{\frac{1-2\varepsilon_1-2\varepsilon_2\sqrt{-1}}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial rG}{\partial r} \right) dr \\ - r^{-\varepsilon_2 \sqrt{-1}} \int_0^r r^{\frac{1-2\varepsilon_1+2\varepsilon_2\sqrt{-1}}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial rG}{\partial r} \right) dr \end{array} \right|$$

1) Cioè se  $H$  si immagina espressa per  $r$  e due angoli, le  $C'$ ,  $C''$  saranno funzioni semplicemente di questi due angoli, od anche di  $\frac{x}{r}$ ,  $\frac{y}{r}$ ,  $\frac{z}{r}$ .

La funzione  $H$  per ipotesi si conserva finita in tutta la sfera ed in particolare per  $r=0$ ; ma  $\varepsilon_1 - 1 = \frac{3\omega^2 - 2\Omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} < 0$ , dunque, perchè la  $H$  non diventi infinita per  $r=0$ , di necessità dovranno essere  $C' = 0$ ,  $C'' = 0$ . Mutato sotto il vincolo integrale  $r$  in  $r\sigma$  ed assunta  $\sigma$  come variabile d'integrazione, dopo semplici riduzioni si otterrà

$$H = \frac{2\pi}{a\varepsilon_1 r} \int_0^1 \sigma^{\frac{1-2\varepsilon_1}{2}} \frac{\sigma^{\varepsilon_1} V^{-1} - \sigma^{-\varepsilon_1} V^{-1}}{2V^{-1}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{V\sigma} \frac{\partial \cdot \sigma G}{\partial \sigma} \right) d\sigma,$$

od anche, se si fa

$$G_\sigma = \frac{\sigma}{T_\sigma} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{\sigma}{T_\sigma},$$

dove  $T_\sigma$  è ciò che diventa  $T$  dopo il cambiamento di  $r$  in  $r\sigma$

$$(12) H = \frac{2\pi}{a\varepsilon_1} \int_0^1 \sigma^{\frac{1-2\varepsilon_1}{2}} \frac{\sigma^{\varepsilon_1} V^{-1} - \sigma^{-\varepsilon_1} V^{-1}}{2V^{-1}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{V\sigma} \frac{\partial \cdot \sigma G_\sigma}{\partial \sigma} \right) d\sigma,$$

onde, avendo presente che  $\sigma \frac{\partial G}{\partial \sigma} = r \frac{\partial G}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma^2 \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) = \sigma \frac{\partial^2 \cdot \sigma G}{\partial \sigma^2}$ , si trarrà

$$(13) \vartheta = \frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{a\varepsilon_1} \int_0^1 \sigma^{\frac{1-2\varepsilon_1}{2}} \frac{\sigma^{\varepsilon_1} V^{-1} - \sigma^{-\varepsilon_1} V^{-1}}{2V^{-1}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( V\sigma \frac{\partial^2 \cdot \sigma G_\sigma}{\partial \sigma^2} \right) d\sigma.$$

4.° Resta ora a vedere come si riducano le espressioni di  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  per  $r=a$ : premesso che  $H$ ,  $P$ ,  $Q$  sono simmetriche rispetto a' due punti  $x, y, z$ ;  $x_1, y_1, z_1$ , e che si ha

$$r \frac{\partial}{\partial x} \int_0^r H dr = \frac{x}{r} \int_0^r H dr + r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \int_0^r H dr \right)$$

si desume subito dalla (10)

$$(14) \quad [\xi]_{r=a} = \left[ \frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} x H - \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x}{r} \int_0^r H dr \right]_{r=a} \\ + \frac{a^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{H dr_1}{\sqrt{r_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H dr_1 \right]_{r=a}.$$

Ma detto  $R\sigma$  ciò che diventa  $R$  quando si mutino  $x_1, y_1, z_1$  in  $x_1\sigma, y_1\sigma, z_1\sigma$  e posto

$$G_{\sigma}^{(a)} = \frac{\alpha}{\sigma} \left[ \frac{\sigma}{R\sigma} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \cdot \frac{\sigma}{R\sigma} \right]$$

sarà

$$\left[ \frac{\partial G_{\sigma}}{\partial x} \right]_{r=a} = \frac{\partial G_{\sigma}^{(a)}}{\partial x} + \frac{x}{a^2} \left[ G_{\sigma}^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial G_{\sigma}^{(a)}}{\partial r_1} \right]$$

e così pure

$$\left[ \frac{\partial H}{\partial x} \right]_{r=a} = \frac{\partial H^{(a)}}{\partial x} + \frac{x}{a^2} \left[ H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right],$$

se con  $H^{(a)}$  si designa ciò che diventa  $H$  quando si sostituisce  $G_{\sigma}^{(a)}$  in luogo di  $G_{\sigma}$ . D'altra parte

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \left( H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right) \frac{dr_1}{\sqrt{r_1}} = 2H^{(a)}.$$

$$\frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} \left( H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right) dr_1 = 2H^{(a)} - \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H^{(a)} dr_1,$$

$$\frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H^{(a)} dr_1 = \frac{1}{a} \int_0^a H dr_1$$

e in conseguenza

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \left( H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right) \frac{dr_1}{\sqrt{r_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} \left( H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right) dr_1 \\
&= -\frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} H^{(a)} + \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H^{(a)} dr_1 = -\frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} H^{(a)} \\
&\quad + \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{a} \int_0^a H dr_1
\end{aligned}$$

perciò sostituendo nella (14)

$$(14') \quad [\xi]_{r=a} = \left[ \frac{\partial J}{\partial x_1} \right]_{r=a} + \frac{a^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{H^{(a)} dr_1}{\sqrt{r_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H^{(a)} dr_1 \right]$$

Se poi si pone

$$G_\sigma^* = \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{R_\sigma} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{R_\sigma} \right]$$

e si accenna con  $H^*$  ciò che diventa  $H^{(a)}$  quando si cambi  $G_\sigma^{(a)}$  in  $G_\sigma^*$ , è ovvio verificare che

$$\frac{\partial G_\sigma^{(a)}}{\partial x} = -\frac{\partial G_\sigma^*}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial H^{(a)}}{\partial x} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_1}$$

che se finalmente negli integrali che figurano in (14'), si cambia dappertutto  $r_1$  in  $r_1 \sigma_1$  e si assume  $\sigma_1$  come variabile d'integrazione, si avrà

$$[\xi]_{r=a} = \left[ \frac{\partial J}{\partial x_1} \right]_{r=a} - \frac{a^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \int_0^1 \frac{H^*}{\sigma_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \right] d\sigma_1 \right].$$

Ma

$$[J]_{r=a} = -\frac{1}{R} + \frac{1}{a} - a \int_0^a \frac{dr}{r} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{a^2} \right)$$



quindi, se per compendio si faccia

$$\Pi = \frac{1}{R} - \frac{1}{a} + a \int_0^a \frac{dr}{r} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{a^2}{2\pi} \int_0^1 \frac{H^*}{\sigma_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \right] d\sigma_1,$$

ne verrà

$$[\xi]_{r=a} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1},$$

e analogamente

$$(14'') \quad [\eta]_{r=a} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y_1}, \quad [\zeta]_{r=a} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z_1}.$$

L'integrale duplicato rispetto a  $\sigma$  ed a  $\sigma_1$  che entra nell'espressione di  $\Pi$ , si potrebbe facilmente convertire in una somma di integrali semplici, ma per lo scopo di questo lavoro siffatta trasformazione non importa.

5.° Passiamo ora al caso generale in cui, pur essendo nulle le forze che sollecitano ogni singolo elemento di massa, le forze agenti alla superficie sieno qualunque colla sola condizione di costituire un sistema di forze in equilibrio. Sieno per unità di superficie  $L, M, N$  le loro componenti secondo gli assi;  $u, v, w$  gli spostamenti che esse producono nella sfera e  $\Theta$  la condensazione cubica. Per noti teoremi del prof. Betti avremo

$$\begin{aligned} 4\pi\Omega^2\Theta &= \frac{1}{\epsilon} \int_s \left( L \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R} + M \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} + N \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{R} \right) ds \\ &\quad - 2\omega^2 \int_s \left( u \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R} + v \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} + w \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{R} \right) ds, \\ \frac{1}{\epsilon} \int_s (L\xi + M\eta + N\zeta) ds &= 2\omega^2 \int_s \left( u \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R} + v \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} \right. \\ &\quad \left. + w \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{R} \right) ds \end{aligned}$$

e da queste relazioni, posto

$$A = \frac{1}{\epsilon} \int_s L \left( \Pi + \frac{1}{R} \right) ds, \quad B = \frac{1}{\epsilon} \int_s M \left( \Pi + \frac{1}{R} \right) ds, \quad C = \frac{1}{\epsilon} \int_s N \left( \Pi + \frac{1}{R} \right) ds,$$

si trae

$$(15) \quad 4\pi\Omega^2 \Theta = \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1} ;$$

ma di  $\Theta$  conviene dare un'altra espressione più comoda. Accennata con  $\Phi$  una funzione finita, continua, ad un sol valore e soddisfacente entro la sfera alla  $\Delta^2 = 0$ , facciasi ipoteticamente

$$(15') \quad \Theta = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} ,$$

ne verrà

$$\frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2 \Omega^2} \left( \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1} \right)$$

onde

$$(16) \quad \Phi = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2 \Omega^2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{r_1} \frac{A dr_1}{r_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{r_1} \frac{B dr_1}{r_1} + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{r_1} \frac{C dr_1}{r_1} \right)$$

Poichè, attesa l'ipotesi fatta sulle forze  $L, M, N$ , si ha

$$(17) \quad \int_s L ds = 0, \quad \int_s M ds = 0, \quad \int_s N ds = 0,$$

nello sviluppo delle  $A, B, C$  in serie ordinate per le potenze ascendenti di  $\frac{r_1}{a}$  i termini indipendenti da  $r_1$  vengono a mancare; per questo motivo così gli integrali del secondo membro della (16) come le loro derivate rispetto alle  $x_1, y_1, z_1$  si mantengono finite in tutta la sfera. Che sieno poi inoltre funzioni continue ad un sol valore e soddisfino entro la sfera alla  $\Delta^2 = 0$ , è cosa che si vede senza difficoltà.

6.° Secondo il metodo esposto nella mia Memoria <sup>1)</sup> devesi ora assegnare una funzione  $\psi_1$ , la quale nello spazio esterno alla sfera sia finita, continua, ad un sol valore, soddisfi alla  $\Delta^2 = 0$ , si annulli all'infinito e in superficie per la derivata rispetto ad  $r_1$  prenda i valori  $\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial^2 \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1^2}$ : queste condizioni

1) Vedi *l. c.*, pag. 89.

la determinano completamente e se ne ottiene la espressione col processo che segue. Si consideri la funzione

$$\Phi_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{r_1}{a} \frac{\partial^2 \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1^2},$$

la quale, nell'interno della sfera, gode delle stesse proprietà generali che alla funzione  $\psi_1$  abbiamo imposto nello spazio esterno e la si immagini continuata nello spazio esterno, ma colla condizione che in superficie prenda gli stessi valori di  $\Phi_1$ . Mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci quando per centro d'inversione si prenda il centro della sfera data e la sfera stessa per sfera direttrice, trovasi per la funzione cercata <sup>1)</sup>

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{d}{dr_1} \left( r_1^2 \frac{d}{dr_1} \frac{\Phi \left( \frac{a^2}{r_1} \right)}{r_1} \right).$$

Poniamo ipoteticamente

$$\frac{r_1}{a} \frac{d\psi_1}{dr_1} = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{d}{dr_1} \left( r_1^2 \frac{d}{dr_1} \frac{\Phi \left( \frac{a^2}{r_1} \right)}{r_1} \right),$$

ne verrà, rappresentando con  $\Phi' \left( \frac{a^2}{r_1} \right)$  la derivata di  $\Phi \left( \frac{a^2}{r_1} \right)$  rispetto all'argomento  $\frac{a^2}{r_1}$ ,

$$(18) \quad \psi_1 = -\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{a^3}{r_1^2} \Phi' \left( \frac{a^2}{r_1} \right).$$

Questa funzione fruisce di tutte le proprietà caratteristiche della  $\psi_1$ , ma non mi fermerò a farne la verifica. Noterò di passaggio che la funzione designata con  $\psi$  nella mia Memoria sarebbe in questo caso espressa da  $\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1}$ .

7.° Dopo ciò posto

$$\omega^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2 + (z'_1 - z_1)^2$$

1)  $\Phi \left( \frac{a^2}{r_1} \right)$  simboleggia ciò che diventa  $\Phi$ , quando al posto di  $r_1$  vi si sostituisce  $\frac{a^2}{r_1}$ .

e indicati con  $\Theta'$ ,  $\psi'_1$  i valori di  $\Theta$ ,  $\psi_1$  nel punto  $x'_1$ ,  $y'_1$ ,  $z'_1$ , l'integrale <sup>1)</sup>)

$$(19) \quad -\frac{1}{4\pi\omega^2} \int_s (\Omega^2 \Theta - \omega^2 \psi'_1) \left( \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{\omega} \frac{dy'}{dn} - \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{\omega} \frac{dz'}{dn} \right) ds$$

diventerà <sup>2)</sup>)

$$\frac{\Omega^2}{4\pi^2(\Omega^2 - \omega^2)} \int_s \left( \frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)' \left( y' \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{\omega} - z' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{\omega} \right) ds$$

ossia

$$\frac{\Omega^2}{4\pi^2(\Omega^2 - \omega^2)} \left( z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \int_s \left( \frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)' \frac{ds}{\omega} - y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_s \left( \frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)' \frac{ds}{\omega} \right).$$

La funzione  $\Phi$  continuata nello spazio esterno colle stesse proprietà e colla condizione di annullarsi all'infinito e di non subire discontinuità nel passaggio dallo spazio interno all'esterno, ha per espressione  $\frac{a}{r_1} \Phi \left( \frac{a^2}{r_1} \right)$ , di cui la derivata rispetto ad  $r_1$

ha in superficie il valore  $-\left( \frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)$ ; quindi per la densità  $\delta$  della materia che distribuita sulla superficie sferica  $r = a$  ha per funzione potenziale interna  $\Phi$  e per funzione potenziale esterna  $\frac{a}{r_1} \Phi \left( \frac{a^2}{r_1} \right)$ , sarà data da

$$\delta = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)',$$

dove ben inteso si deve porre  $r_1 = a$ . Pertanto nello spazio interno sarà

$$4\pi\Phi = \int_s \left( \frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)' \frac{ds}{\omega},$$

1) Vedi *l. c.*, p. 90.

2) Con  $\left( \frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)'$  è simboleggiato ciò che diventa la funzione  $\frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1}$  quando le  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , si cambino in  $x'_1$ ,  $y'_1$ ,  $z'_1$ , che sono le variabili rispetto alle quali si deve fare la integrazione.

e l'integrale (19) avrà per valore

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \right).$$

Laonde i doppi  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  delle componenti della rotazione elementare di una particella avranno i valori <sup>1)</sup>

$$(20) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \right) \\ T_2 &= \frac{\partial E}{\partial y_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \\ T_3 &= \frac{\partial E}{\partial z_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right) \end{aligned}$$

8.° Pertanto gli spostamenti  $u$ ,  $v$ ,  $w$  dovranno soddisfare alle tre equazioni indefinite

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^2 u + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} &= 0, & \Delta^2 v + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} &= 0, \\ \Delta^2 w + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} &= 0, \end{aligned} \right.$$

ed a tre equazioni ai limiti del tipo

$$(22) \quad \frac{L}{\varrho} = 2\omega^2 \frac{du}{dr_1} - \frac{1}{\pi} \frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x_1}{r_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2 \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial x_1} + \frac{\omega^2}{r_1} \left( y_1 \frac{\partial E}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial E}{\partial y_1} \right).$$

Facciasi

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \quad v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \quad w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4,$$

e si determinino in primo luogo le  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  colle condizioni di soddisfare entro la sfera alla  $\Delta^2 = 0$  ed in superficie alle equazioni

1) Vedi *L. c.* p. 90.

$$2\omega^2 \frac{du_1}{dr_1} = \frac{L}{\varrho}, \quad 2\omega^2 \frac{dv_1}{dr_1} = \frac{M}{\varrho}, \quad 2\omega^2 \frac{dw_1}{dr_1} = \frac{N}{\varrho}.$$

A cagione delle (17) queste funzioni esistono ed hanno per espressioni

$$(23) \quad u_1 = u^0 + L^*, \quad v_1 = v^0 + M^*, \quad w_1 = w^0 + N^*,$$

dove  $u^0$   $v^0$   $w^0$  sono tre costanti arbitrarie, ed

$$\begin{aligned} L^* &= 2L + \int_s^{r_1} \frac{L}{r_1} dr_1, & L &= \frac{1}{8\pi\varrho\omega^2} \int_s \frac{L}{R} ds, \\ M^* &= 2M + \int_s^{r_1} \frac{M}{r_1} dr_1, & M &= \frac{1}{8\pi\varrho\omega^2} \int_s \frac{M}{R} ds, \\ N^* &= 2N + \int_s^{r_1} \frac{N}{r_1} dr_1, & N &= \frac{1}{8\pi\varrho\omega^2} \int_s \frac{N}{R} ds. \end{aligned}$$

In secondo luogo per le  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  si prendano i valori

$$(24) \quad u_1 = -\frac{x_1}{2\pi} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1}, \quad v_1 = -\frac{y_1}{2\pi} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1}, \quad w_1 = -\frac{z_1}{2\pi} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1}$$

e di seguito si definiscano le  $u_3$ ,  $v_3$ ,  $w_3$  colle condizioni di soddisfare entro la sfera all'equazione  $\Delta^2 = 0$  ed in superficie a tre equazioni del tipo

$$2 \frac{du_3}{dr_1} - \frac{x_1}{\pi} \frac{\partial^2 \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1^2} - \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x_1}{r_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial x_1} = 0.$$

Queste tre funzioni esistono perchè è ben facile verificare che

$$\int_s x_1 \frac{\partial^2 \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1^2} ds + \frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \int_s \frac{x_1}{r_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} ds - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \int_s \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial x_1} ds = 0;$$

ora le condizioni imposte alle  $u_3, v_3, w_3$  non differiscono da quelle cui soddisfano le  $\xi_3, \eta_3, \zeta_3$  salvo la mutazione del simbolo  $H$  nel simbolo  $\Phi$ ; per cui sarà

$$(25) \quad u_3 = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} x_1 \Phi + \frac{1}{2\pi} x_1 \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} r_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{r_1} \Phi dr_1 \\ + \frac{1}{8\pi} \left( a^2 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} - r_1^2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \right)$$

dove per compendio si è fatto

$$P_1 = 2\Phi + \frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{\Phi dr_1}{\sqrt{r_1}}, \quad Q_1 = 2\Phi - \frac{3}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{\Phi dr_1}{\sqrt{r_1}}.$$

Mutando successivamente nella (25)  $x_1$  in  $y_1, z_1$  se ne deducono i valori di  $v_3, w_3$ .

9.° Finalmente le  $u_4, v_4, w_4$  si determineranno colle condizioni di soddisfare entro la sfera alla  $\Delta^2 = 0$  ed in superficie alle equazioni

$$(21') \quad \left\{ \begin{array}{l} 2r_1 \frac{du_4}{dr_1} + y_1 \frac{\partial E}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial E}{\partial y_1} = 0, \\ 2r_1 \frac{dv_4}{dr_1} + z_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial E}{\partial z_1} = 0, \\ 2r_1 \frac{dw_4}{dr_1} + x_1 \frac{\partial E}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} = 0. \end{array} \right.$$

Ma anche le  $r_1 \frac{du_4}{dr_1}, \dots$  soddisferanno alla  $\Delta^2 = 0$  e, poichè si ha

$\Delta^2 E = 0$ , lo stesso avverrà per le  $y_1 \frac{\partial E}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial E}{\partial y_1}, \dots$  dunque, dovendo essere  $u_4, v_4, w_4$  funzioni finite, continue e a un sol valore, le equazioni (21') reggeranno non solo per i punti della superficie ma per tutti i punti della sfera: perciò

$$(26) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \left( z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} \right), \\ v_1 = \frac{1}{2} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} \right), \\ w_1 = \frac{1}{2} \left( y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} \right). \end{cases}$$

Possiamo fare astrazione dalle costanti arbitrarie che bisognerebbe aggiungere alle  $u_3, v_3, \dots, v_1, u_1, \dots$  e supporle compenstrate nelle  $u^0, v^0, w^0$ . Resta ancora a determinare la funzione  $E$ ; perciò formiamoci le  $T_1, T_2, T_3$  si avrà

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{\partial N^*}{\partial y_1} - \frac{\partial M^*}{\partial z_1} - \frac{1}{2\pi r_1} \left( y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{r_1} \Phi dr_1 - z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{r_1} \Phi dr_1 \right) \\ + \frac{\partial w_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z_1} - \frac{1}{4\pi} \left( y_1 \frac{\partial Q_1}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial Q_1}{\partial y_1} \right) \end{aligned}$$

e altre due espressioni analoghe per le  $T_2, T_3$ . Comparando queste espressioni delle  $T$  con quelle somministrate dalle (20) e sommando membro a membro le eguaglianze così ottenute dopo aver moltiplicato la prima per  $\frac{x_1}{r_1}$ , la seconda per  $\frac{y_1}{r_1}$ , la terza per  $\frac{z_1}{r_1}$ , avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial r_1} = \frac{x_1}{r_1} \left( \frac{\partial N^*}{\partial y_1} - \frac{\partial M^*}{\partial z_1} \right) + \frac{y_1}{r_1} \left( \frac{\partial L^*}{\partial z_1} - \frac{\partial N^*}{\partial x_1} \right) + \frac{z_1}{r_1} \left( \frac{\partial M^*}{\partial x_1} - \frac{\partial L^*}{\partial y_1} \right) \\ + \frac{x_1}{r_1} \left( \frac{\partial w_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right) + \frac{y_1}{r_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right) + \frac{z_1}{r_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right). \end{aligned}$$

D'altra parte si cava facilmente dalle (26)



$$2 \left( \frac{\partial w_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} + \frac{\partial E}{\partial x_1},$$

$$2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial z_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} + \frac{\partial E}{\partial y_1},$$

$$2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) = \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} + \frac{\partial E}{\partial z_1},$$

quindi sostituendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial r_1} - \frac{E}{r_1} = \frac{2x_1}{r_1} \left( \frac{\partial N^*}{\partial y_1} - \frac{\partial M^*}{\partial z_1} \right) + \frac{2y_1}{r_1} \left( \frac{\partial L^*}{\partial z_1} - \frac{\partial N^*}{\partial x_1} \right) \\ + \frac{2z_1}{r_1} \left( \frac{\partial M^*}{\partial x_1} - \frac{\partial L^*}{\partial y_1} \right) \end{aligned}$$

d'onde

$$\begin{aligned} (27) \quad E = r_1 E^* + 2x_1 \int_0^{r_1} \left( \frac{\partial N^*}{\partial y_1} - \frac{\partial M^*}{\partial z_1} \right) \frac{dr_1}{r_1} + 2y_1 \int_0^{r_1} \left( \frac{\partial L^*}{\partial z_1} - \frac{\partial N^*}{\partial x_1} \right) \frac{dr_1}{r_1} \\ + 2z_1 \int_0^{r_1} \left( \frac{\partial M^*}{\partial x_1} - \frac{\partial L^*}{\partial y_1} \right) \frac{dr_1}{r_1}, \end{aligned}$$

essendo  $E^*$  funzione soltanto di  $\frac{x_1}{r_1}$ ,  $\frac{y_1}{r_1}$ ,  $\frac{z_1}{r_1}$  e tale che  $r_1 E^*$  soddisfi alla  $\Delta^2 = 0$ ; sarà dunque semplicemente

$$r_1 E^* = 2p^0 x_1 + 2q^0 y_1 + 2r^0 z_1$$

dove  $p^0, q^0, r^0$  sono costanti arbitrarie. La funzione  $E$  data dalla (27) e le sue derivate sono finite entro la sfera, imperocchè attese le condizioni di equilibrio

$$\int_s (yN - zM) ds = 0, \quad \int_s (zL - xN) ds = 0, \quad \int_s (xM - yL) ds = 0$$

cui sono obbligate le forze  $L, M, N$ , se le funzioni sotto i segni d'integrazione nel secondo membro della (27) si sviluppano in serie ordinate per le potenze ascendenti di  $\frac{r_1}{a}$ , i termini che contengono  $r_1$  al denominatore, scompaiono.

Le parti delle  $u, v, w$ , nelle quali figurano  $p^0, q^0, r^0$ , si riducono a

$$q^0 z_1 - r^0 y_1, \quad r^0 x_1 - p^0 z_1, \quad p^0 y_1 - q^0 x_1;$$

di guisa che gli spostamenti  $u, v, w$  si possono dividere in due gruppi, uno de' quali rappresentato da

$$u^0 + q^0 z_1 - r^0 y_1, \quad v^0 + r^0 x_1 - p^0 z_1, \quad w^0 + p^0 y_1 - q^0 x_1,$$

converrebbe alla sfera anche supposta irrigidita; questo gruppo che le condizioni del nostro problema non determinano, è senza influenza sulla deformazione.

10.<sup>o</sup> E così il problema che io m'ero proposto, trovasi completamente risoluto. Resterebbero per verità a cercare i termini da aggiungere alle espressioni di  $u, v, w$  qualora non fossero zero le forze agenti sopra ciascun elemento di massa: ma chi vorrà consultare la Memoria e la Nota citate al principio del lavoro, sopperirà agevolmente al difetto.

Con poche modificazioni si passerebbe dal caso qui trattato a quello di un corpo indefinito limitato internamente da una superficie sferica, quando fossero date le forze agenti sulla superficie della sfera e si supponessero nulli gli spostamenti dei punti situati a distanza infinita. Ma le modificazioni sono troppo ovvie, perchè convenga insistervi.

La deformazione di una sfera omogenea isotropa venne studiata prima da Lamé <sup>1)</sup>, poi da altri geometri ed in particolar modo da W. Thomson <sup>2)</sup>, e da Borchardt <sup>3)</sup>. Lamé e Thomson

1) *Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques*. Journ. de math. pures et appl., première série, t. 19, p. 51-87.

2) *Dynamical Problems Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid*. Phil. Trans. of the R. Society of London, vol. 153, p. 583-616.

3) *Untersuchungen über Elasticität unter Berücksichtigung der Wärme*. Monats. der k. Ak. der Wiss. zu Berlin, 1873, p. 9-56. — *Ueber Deformationen elastischer isotroper Körper durch mechanische an ihrer Oberfläche wirkende Kräfte*, id. p. 560-578.

espressero gli spostamenti per serie infinite, Borchardt invece per integrali definiti. Questo mio lavoro contiene una novella soluzione del problema per integrali definiti; in ciò e nell'impiego delle proprietà delle funzioni potenziali la mia soluzione si accosta a quella di Borchardt, ma io spero che il metodo di ricerca apparirà totalmente diverso e di indole affatto generale, mentre quello seguito da Borchardt sembra esclusivo alla sfera.

N. B. Per un errore tipografico, alla pag. 197 sono indicate col simbolo (7) le formole della riga 10<sup>a</sup>, mentre quel simbolo compete alla formola della 8<sup>a</sup> riga.

N. d. R.



SULLA VARIABILITÀ DEL CALORE SPECIFICO DELL'ACQUA FRA 0° E + 32°;  
MEMORIA DEI PROFF. A. BARTOLI ED E. STRACCIATI <sup>1)</sup>.

Per avere poi il calore specifico vero di grado in grado abbiamo ammesso che il calorico specifico dell'acqua,  $C_{T,t}$ , medio fra le due temperature  $T$  e  $t$  (iniziale e finale del calorimetro, le quali non differivano per solito che circa 2°), sia uguale al calore specifico vero alla temperatura intermedia  $\frac{T+t}{2} = \theta$ ; e con i valori che si erano trovati di  $\log \alpha C_{T,t}$ , uguali, per l'ipotesi fatta, a  $\log \alpha C_\theta$  si è costruito una curva prendendo come ascisse le temperature  $\theta$  e come ordinate i valori di  $\log \alpha C_\theta$ : da questa curva si sono dedotti i valori di  $\log \alpha C_\theta$  di grado in grado, i quali sono registrati pel rame palline grandi nella tavola VI (seconda colonna) insieme ai valori che si ottengono per il calorico specifico vero dell'acqua di grado in grado, determinando la costante  $\alpha$  in modo da rendere uguale a 1 il calore specifico vero a 15°.

Si sono così ottenute sei serie di valori del calorico specifico vero  $C_\theta$  dell'acqua, da 0° a 31 (tante quante sono le serie di esperienze da noi fatte con diversi metalli) le quali sono registrate nella tavola VII insieme alla loro media.

1) *Continuazione e fine.* Vedi pag. 97.

Tavola VI. — RAME pall. grandi.

$\frac{t+T}{2}$	$\log \frac{\alpha M_{100,T}}{m_{100,T}}$	$\log C$	$C$
1	0,00445	0,00284	1,00656
2	0,00419	0,00258	1,00596
3	0,00392	0,00231	1,00533
4	0,00365	0,00204	1,00471
5	0,00341	0,00180	1,00415
6	0,00317	0,00156	1,00360
7	0,00295	0,00134	1,00309
8	0,00275	0,00114	1,00263
9	0,00256	0,00095	1,00219
10	0,00236	0,00075	1,00173
11	0,00220	0,00059	1,00136
12	0,00200	0,00039	1,00090
13	0,00185	0,00024	1,00055
14	0,00173	0,00012	1,00028
15	0,00161	0	1
16	0,00150	1,99989	0,99975
17	0,00137	1,99976	0,99945
18	0,00126	1,99965	0,99919
19	0,00118	1,99957	0,99901
20	0,00109	1,99948	0,99880
21	0,00106	1,99945	0,99873
22	0,00100	1,99939	0,99860
23	0,00096	1,99935	0,99850
24	0,00093	1,99932	0,99844
25	0,00090	1,99929	0,99837
26	0,00089	1,99928	0,99834
27	0,00088	1,99927	0,99832
28	0,00089	1,99928	0,99834
29	0,00090	1,99929	0,99837
30	0,00095	1,99934	0,99848
31	0,00105	1,99944	0,99871

Tavola VII. — Calori specifici veri alla temperatura  $\theta$ .

$\theta$	Col PLATINO	Col BAME palline grandi	Col BAME palline piccole	Con lo STAGNO	Con lo ARGENTO	Con il PIOMBO	MEDIA
0	1,00631	1,00719	1,00847	1,00399	1,00323	1,00388	1,00551
1	1,00577	1,00656	1,00781	1,00362	1,00300	1,00360	1,00506
2	1,00513	1,00596	1,00709	1,00328	1,00281	1,00332	1,00460
3	1,00459	1,00533	1,00642	1,00297	1,00258	1,00314	1,00417
4	1,00408	1,00471	1,00577	1,00263	1,00235	1,00293	1,00374
5	1,00353	1,00415	1,00519	1,00228	1,00212	1,00272	1,00333
6	1,00295	1,00360	1,00457	1,00191	1,00189	1,00240	1,00289
7	1,00249	1,00309	1,00399	1,00154	1,00168	1,00214	1,00249
8	1,00212	1,00263	1,00337	1,00125	1,00143	1,00189	1,00211
9	1,00173	1,00219	1,00279	1,00099	1,00122	1,00157	1,00175
10	1,00138	1,00173	1,00228	1,00076	1,00099	1,00127	1,00140
11	1,00104	1,00136	1,00177	1,00055	1,00081	1,00099	1,00109
12	1,00074	1,00090	1,00129	1,00039	1,00060	1,00067	1,00077
13	1,00042	1,00055	1,00081	1,00021	1,00041	1,00041	1,00047
14	1,00018	1,00028	1,00039	1,00009	1,00021	1,00014	1,00022
15	1	1	1	1	1	1	1
16	0,99982	0,99975	0,99977	0,99998	0,99982	0,99998	0,99985
17	0,99965	0,99945	0,99952	0,99998	0,99961	0,99995	0,99969
18	0,99954	0,99919	0,99931	0,99993	0,99947	0,99995	0,99957
19	0,99956	0,99901	0,99919	0,99991	0,99931	0,99995	0,99949
20	0,99961	0,99880	0,99908	0,99991	0,99919	1,00018	0,99946
21	0,99975	0,99873	0,99908	0,99998	0,99919	1,00044	0,99953
22	0,99995	0,99860	0,99913	1,00007	0,99922	1,00076	0,99962
23	1,00009	0,99850	0,99922	1,00023	0,99924	1,00118	0,99974
24	1,00035	0,99844	0,99936	1,00053	0,99938	1,00168	0,99996
25	1,00067	0,99837	0,99959	1,00090	0,99970	1,00226	1,00025
26	1,00099	0,99834	0,99988	1,00129	1,00005	1,00295	1,00058
27	1,00136	0,99832	0,99923	1,00184	1,00044	1,00364	1,00097
28	1,00189	0,99834	1,00069	1,00251	1,00090	1,00434	1,00144
29	1,00242	0,99837	1,00125	1,00334	1,00154	1,00515	1,00201
30	1,00295	0,99848	1,00184	1,00425	1,00233	1,00596	1,00264
31	1,00364	0,99871	1,00254	1,00517	1,00328	1,00688	1,00337

Esaminando la tavola precedente VII, apparisce che il calore specifico dell'acqua determinato con sei metodi diversi presenta un andamento presso a poco identico, col crescere della temperatura. Con ciascheduno dei sei metodi troviamo che il calore specifico a partire da zero va decrescendo col crescere della temperatura, sino a raggiungere un valore minimo che corri-

sponde alla temperatura di circa  $+18^{\circ}$  col metodo delle palline di platino, di  $+27^{\circ}$  colle palline di rame grandi, di  $+20^{\circ}$ , colle palline di rame piccole, di  $+20^{\circ}$  colle palline di stagno, di  $+20^{\circ}$  con quelle di argento, di  $+19^{\circ}$  con quelle di piombo, e che al di sopra di questa temperatura, il calore specifico prende a crescere regolarmente coll'aumentare della temperatura.

Certamente esistono delle differenze nei valori del calore specifico corrispondenti ad una stessa temperatura, ma queste differenze non sono che piccolissime di fronte a quelle enormi che si riscontrano nelle misure degli sperimentatori che ci hanno preceduto in questa via di determinazioni; se si abbia riguardo alla natura delicatissima delle misure calorimetriche riteniamo che i fisici competenti in questo genere di studi troveranno abbastanza notevole l'accordo trovato con sei metodi assai indipendenti.

Noi abbiamo infatti mutato considerevolmente, le condizioni delle nostre esperienze variando la natura del metallo, il peso e il numero delle palline e la massa dell'acqua come risulta dal prospetto seguente :

	Peso totale delle palline in grammi	Numero delle palline	Peso di ciascheduna	Peso dell'acqua del calorimetro in grammi
Platino. . . . .	118,4	48	25,5	150
Rame (palline grandi) .	2830,0	80	35,4	8000
Rame (palline piccole) .	378,9	20	18,9	904
Stagno. . . . .	650,8	33	20,0	890
Argento . . . . .	253,2	30	8,4	520
Piombo. . . . .	1600,0	55	29,1	2000

Le palline prima di essere adoperate erano state ripetutamente riscaldate in stufa a  $100^{\circ}$  e poscia raffreddate gettandole nell'acqua fredda: questa operazione era stata ripetuta centinaia di volte, affine di ottenere un assetto stabile nelle proprietà termiche dei metalli che si dovevano cimentare: possiamo aggiungere che il calore specifico (medio fra  $+100^{\circ}$  e  $+15^{\circ}$ ) di tutti

i diversi metalli, e riferito all'acqua a  $+ 15^{\circ}$ , risultò alla fine delle nostre determinazioni, esattamente uguale a quello trovato in principio, cioè alcuni anni avanti.

Le regolarità che noi abbiamo trovato nelle precedenti determinazioni coi metalli, si deve principalmente alla grande cura che noi mettemmo nello studio dei nostri termometri, e segnatamente per quello che riguarda la correzione per lo spostamento dello zero e quella per la riduzione al termometro a gaz.

Alcuni degli sperimentatori che ci precorsero in questo studio, tralasciarono la determinazione di queste due correzioni, e si contentarono soltanto di riconoscere che i loro termometri erano ben calibrati e poco più; a ciò si deve, probabilmente, la grandissima discrepanza fra le loro determinazioni.

Come prova di ciò riportiamo una tavola che fu pubblicata in una nostra precedente memoria <sup>1)</sup>.

In questa tavola sono scritti i calori specifici medi degli stessi metalli impiegati nelle determinazioni sopra riferite, ma i calcoli sono stati eseguiti senza applicare ai termometri calorimetrici la riduzione al termometro ad aria, e la correzione per lo spostamento dello zero corrispondente a ciascheduna temperatura.

1) Bartoli e Stracciati, *Revisione di alcune misure calorimetriche fondamentali*. Nuovo Cimento, terza serie, vol. XVIII, 1885; e Rendiconti dell'Accademia R. dei Lincei, seduta del 21 giugno 1886.

Temperature iniziali del liquido del calorimetro	CALORICI SPECIFICI MEDII DEL			
	Rame del commercio (rispetto all'acqua)	Stagno (rispetto all'acqua)	Argento (rispetto all'acqua)	Piombo (rispetto all'acqua)
0° — 1°	0,093 885	0,056 100	0,056 0795	0,030 7209
1 — 2	766	106	—	—
2 — 3	963	173	1486	8690
3 — 4	815	084	—	—
4 — 5	856	0,055 920	1100	9136
5 — 6	879	896	—	—
6 — 7	731	949	1429	8770
7 — 8	632	932	—	—
8 — 9	591	823	1588	9170
9 — 10	890	677	—	—
10 — 11	377	518	6363	0,031 0482
11 — 12	335	660	—	—
12 — 13	221	585	2642	0038
13 — 14	412	440	—	—
14 — 15	439	576	9863	0,030 9458
15 — 16	446	633	—	—
16 — 17	925	565	9517	9008
17 — 18	0,094 014	932	—	—
18 — 19	0,093 609	930	5232	0,031 0383
19 — 20	697	832	—	—
20 — 21	989	991	5450	1198
21 — 22	0,094 119	0,056 289	—	—
22 — 23	0,093 925	237	6588	0040
23 — 24	972	121	—	—
24 — 25	799	0,055 761	4305	0,030 8268
25 — 26	0,094 035	770	—	—
26 — 27	0,093 845	0,056 026	5618	8068
27 — 28	0,092 779	0,055 383	—	—
28 — 29	0,093 179	272	3950	9603
29 — 30	0,093 549	354	—	—
30 — 31	0,093 432	652	4574	7643
31 — 32	—	—	—	—
32 — 33	—	—	1422	6169

Ciascuno dei numeri qui inscritti è la media di 15 a 20 esperienze; le serie col rame e con lo stagno furono eseguite con i termometri Geissler, le altre serie con i termometri Baudin.

Se da questi dati, ricaviamo il calore specifico vero dell'acqua, di grado in grado da 0° a 32°, troveremo per ciaschedun metallo una curva sinuosa, che presenta un grande numero di



*massimi e minimi nel solo intervallo 0° — 31°!! Risultati analoghi abbiamo ottenuti impiegando palline di platino coll'acqua.*

*Il bello si è che anche il mercurio, studiato con lo stesso metodo e con gli stessi termometri ci ha presentato le stesse singolarità dell'acqua; cioè con gli stessi termometri <sup>1)</sup>, il calore specifico vero del mercurio fra 0° e 31° presenta un grande numero di massimi e minimi, i quali, in generale, coincidono coi massimi e minimi del calore specifico vero dell'acqua, studiato con gli stessi termometri !!!*

Temperature iniziali del liquido del calorimetro	Calore specifico medio del Platino (rispetto al mercurio purissimo)	Temperature iniziali del liquido del calorimetro	Calore specifico medio del Platino (rispetto al mercurio purissimo)
0° — 1°	0,96 8613	17 — 18	—
1 — 2	—	18 — 19	0,96 9153
2 — 3	8524	19 — 20	—
3 — 4	—	20 — 21	0,96 9171
4 — 5	8961	21 — 22	—
5 — 6	—	22 — 23	8732
6 — 7	1009	23 — 24	—
7 — 8	—	24 — 25	0,97 0200
8 — 9	1866	25 — 26	—
9 — 10	—	26 — 27	0,97 1436
10 — 11	4461	27 — 28	—
11 — 12	—	28 — 29	0,97 2417
12 — 13	1375	29 — 30	—
13 — 14	—	30 — 31	0,97 1215
14 — 15	0144		—
15 — 16	—		—
16 — 17	0,95 8967		

Ognun vede dunque a quale causa si debbano attribuire i molteplici massimi e minimi trovati nel calore specifico dell'acqua da qualche poco cunto sperimentatore.

L'insigne fisico E. A. Rowland a cui si debbono molte importanti determinazioni calorimetriche trovò « che il calore specifico dell'acqua decresce da 0° a + 29°, dopo il qual punto

1) S'intenda, con gli stessi termometri, ma non corretti per la posizione dello zero corrispondente alle diverse temperature, nè per la riduzione al termometro a gaz.

*cresce*. Questo fatto, egli aggiunge, avviene solamente quando la temperatura sia misurata con un termometro ad aria, e non è più vero quando sia misurata con alcuni termometri a mercurio compreso quello costruito dal Geissler <sup>1)</sup> ».

Ciò è perfettamente d'accordo coi nostri risultati, salvo che noi troviamo il minimo a  $+20^{\circ}$  invece che a  $+29^{\circ}$ .

Nella nota a fine di questa pagina, riferiamo i risultati della analisi chimica dei metalli impiegati nelle ricerche precedenti <sup>2)</sup>.

### III.

#### Esperienze fatte mescolando acqua a $0^{\circ}$ con acqua alla temperatura dell'ambiente.

In queste esperienze si adoprò il grande calorimetro di nichel, che ci aveva già servito per le esperienze con le palline di rame grandi, disposto al solito modo entro allo stesso recinto alla Berthelot. L'agitatore fu costruito appositamente per queste esperienze: era anch'esso di nichel ed è rappresentato dalla fig. 2 della tav. I; *da* sono due sottili lamine orizzontali, di un diametro poco inferiore a quello del calorimetro, distanti circa un terzo dell'altezza del calorimetro, e riunite da due bacchette verticali *aa* e da tre larghe lamine piegate ad elica, le quali

1) E. A. Rowland, *Relazione critica sulle varie determinazioni dell'equivalente meccanico della calorìa*; Venezia 1882, Tipografia Antonelli, pag. 78. (Memoria premiata dal R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti).

2) Due palline di platino del peso complessivo di grammi 5 furono disciolte nell'acqua regia: l'analisi più scrupolosa rilevò una piccolissima quantità d'iridio, e tracce di metalli della famiglia del platino.

Il rame (palline piccole, dorate) conteneva il 0,13 per cento di stagno e 0,12 d'oro e tracce di altri metalli. (L'analisi fu fatta sciogliendo 19 grammi di rame): Il rame, palline grandi, conteneva il 0,005 per cento di stagno.

Lo stagno conteneva 0,030 per cento di ferro, e il 0,008 di piombo (l'analisi fu fatta sopra 18 grammi di stagno).

L'argento conteneva il 0,047 per cento di rame ed il 0,016 di oro (l'analisi fu fatta sopra 6,4 gr. di argento).

Il piombo conteneva il 0,033 per cento di tallio e tracce di altri metalli: L'analisi fu fatta su 28 grammi di piombo.

Le analisi furono eseguite dal chiarissimo sig. prof. G. Papasogli nel laboratorio di Chimica della R. Scuola superiore di Mercologia in Firenze, che qui nuovamente ringraziamo.

servivano egregiamente a rimescolare il liquido. Un foro centrale lasciava libero passaggio al termometro.

Per raffreddare a zero l'acqua da versare dentro il calorimetro, adoperammo una grande boccia di nichel della capacità di parecchi litri, la quale si circondava completamente di ghiaccio entro una cassa appositamente costruita, della capacità di più quintali.

La boccia di nichel era munita di un agitatore e vi era immerso un termometro sensibilissimo, diviso a centesimi di grado, coi centesimi ampi oltre un millimetro <sup>1)</sup>.

L'apparecchio non differiva molto per la disposizione da quello del Rowland, (On the mechanical equivalent of heat, Cambridge, 1880, pag. 123 fig. 4<sup>a</sup>) il nostro però era colossale, ed assai più complicato.

Le esperienze erano condotte nel seguente modo: riempita la boccia di nichel di acqua già fredda sino a pochi gradi sopra zero, la si richiudeva, e si lasciava a sè per circa 24 ore, avendo cura ogni tante ore, di aggiungere del ghiaccio nella cassa, in quantità uguale a quello che si era fuso. Dopo circa 24 ore si agitava di tratto in tratto l'acqua della boccia di nichel, ed in pari tempo si leggeva il termometro col cannocchiale, per assicurarsi che la temperatura non variava più anche in capo a dieci minuti, e che essa era inferiore a  $+0^{\circ},020$ .

Allora si cominciava a leggere il termometro del calorimetro nel quale, già da lungo tempo si era introdotta una nota massa d'acqua, il termometro calorimetrico si leggeva di minuto in minuto mentre un assistente agitava l'acqua del calorimetro, quando si giudicava opportuno si faceva cadere una certa quantità di acqua a zero nel calorimetro.

Manovrando l'agitatore, bastava un minuto perchè la temperatura del calorimetro raggiungesse un valore che restava per

<sup>1)</sup> Questo termometro che si adoperava per determinare la temperatura dell'acqua della boccia fu fatto costruire appositamente; avea il serbatoio lungo 10 centimetri in modo da occupare gran parte dell'altezza della boccia, ed era graduato da  $-3^{\circ}$  a  $+3^{\circ}$ : esso o rimaneva sempre nella boccia, e perciò ad una temperatura molto vicina a zero, per tutto il tempo che durarono queste esperienze coll'acqua fredda, (circa 2 anni).

Il termometro era stato costruito dal Müller successore del Geissler (a Bonn).

L'apparecchio per mantenere l'acqua a zero, il quale era assai complicato, fu costruito abilmente dalla officina Turchini di Firenze via S. Gallo.

un poco costante e che dopo cominciava ad aumentare regolarmente: si notava quel valore come temperatura finale del mescolgio e si osservava la temperatura per altri 9 minuti per fare poi la correzione del calore acquistato dall'ambiente durante l'esperienza.

Terminata la esperienza si ripesava il calorimetro e l'aumento di peso rappresentava l'acqua fredda versatavi <sup>1)</sup>.

Per dedurre da queste esperienze il calorico specifico dell'acqua di grado in grado, come dalle esperienze fatte coi metalli, abbiamo cominciato dal calcolare, da ciascuna esperienza, il calore specifico dell'acqua del calorimetro, prendendo come unità quello dell'acqua fredda versatavi. Diremo prima di questi calcoli e poi degli altri.

Per le correzioni da apportare ai termometri calorimetrici, (che furono gli stessi che avevamo adoprato per le esperienze coi metalli), possiamo riferirci a quanto abbiamo già detto precedentemente. Soltanto aggiungeremo che in queste esperienze si tenne conto del punto fino al quale era immerso il termometro avanti e dopo il mescolgio e si dedusse da ciò la pressione sofferta nei due casi dal centro del bulbo, e si calcolò la correzione dovuta all'aumento di pressione esterna prodotto versando l'acqua fredda.

La correzione di pressione esterna fu fatta anche pel termometro che dava la temperatura dell'acqua fredda della bocca riducendone le indicazioni alla pressione normale.

La correzione per la colonna non immersa del termometro calorimetrico fu fatta, tanto avanti come dopo il mescolgio con l'acqua fredda, prendendo per temperatura della parte non immersa quella indicata da un termometrino a quinti di grado sospeso accanto all'asta del termometro calorimetrico.

1) Gli apparecchi per mantenere l'acqua a zero erano due, perfettamente uguali: potevamo perciò eseguire anche due determinazioni nel periodo di ventiquattro ore.

Per evitare che si deponesse un velo di rugiada sulle pareti esterne del calorimetro, dopo avere versata l'acqua fredda, si ebbe cura di mantenere l'aria abbastanza secca nella sala dello esperienze, con calce viva, tenuta in diverse grandi casse.

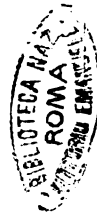
Inoltre il raffreddamento dell'acqua del calorimetro non superò mai i 3°,5 — La superficie speculare di nichel, permotava di scorgere nettamente il più piccolo velo di rugiada deposta e noi abbiamo rinunziato a quelle poche esperienze nelle quali ciò avvenne.

Il riscaldamento del calorimetro prodotto dall'ambiente, nel minuto che correva dall'istante in cui si faceva il mescuglio, a quello nel quale si osservava la temperatura finale, si è determinato ammettendo che fosse la media dei riscaldamenti che avvenivano in un eguale intervallo di tempo avanti e dopo il mescuglio; e questi erano dedotti dalla variazione di temperatura che avveniva in 9 minuti.

Quanto alle pesate vale quello che abbiamo già detto, anzi in queste esperienze sarebbe stato inutile fare la riduzione al vuoto del peso dell'acqua, poichè si mescolava acqua con acqua e le due correzioni si eliminavano poi nel calcolo, (facendo il rapporto dei pesi).

Per dare qualche esempio, riportiamo nella tavola seguente (Tav. VIII) tutti i dati relativi ad alcune delle molte determinazioni che facemmo col metodo sopra descritto.





# TAVOLA

dell' agitatore e del termometro	Peso dell' acqua fredda ridotto al vuoto	Posizione dello zero ridotta alla pressione normale pel termometro		avan	
		calorimetrico	che dà la temperatura dell' acqua fredda	10' osservata	
,79	1083,78	—0,009	+0,239	23,200	
,77	1061,05	—0,009	+0,239	23,170	
,81	1153,39	—0,012	+0,249	23,490	
,82	1180,32	—0,009	+0,291	23,476	
,79	1105,56	—0,009	+0,239	23,392	
,68	639,60	—0,009	+0,291	22,890	
,71	871,43	—0,012	+0,311	23,220	
,82	1183,30	—0,012	+0,249	23,744	
,68	830,88	—0,012	+0,311	23,144	
,01	939,75	—0,009	+0,239	23,310	



Numero d'ordine	DATA	Pressione atmosferica ridotta a zero	Press. sul centro del bulbo del termometro calorimetrico espressa in millimetri di mercurio			Temperatura dell'ambiente e della colonna termometrica emergente	Nome del termometro calorimetrico	Nome del termometro che dà la temperatura dell'acqua fredda	Il termometro calorimetrico era immerso fino a		Correzione per la colonna del termometro calorimetrico non immersa	Correzione per l'aumento di pressione sul termometro prodotto dall'aggiunta dell'acqua	Peso dell'acqua del calorimetro ridotto al vuoto	Equivalente in acqua del calorimetro, dell'agitatore e del termometro	Peso dell'acqua fredda ridotto al vuoto	Posizione dello zero ridotta alla pressione normale pel termometro		TEMPERATURE DEL CALORIMETRO																Correzione pel riscaldamento del calorimetro dovuto al raggiungimento ecc.	Raffreddamento dell'acqua del calorimetro	Temperatura dell'acqua fredda versata nel calorimetro		Riscaldamento dell'acqua fredda versata nel calorimetro	$\frac{C_{T,t}}{C_{t,0}}$
			avanti di versare l'acqua fredda	dopo versata l'acqua fredda	avanti di versare l'acqua fredda				dopo versata l'acqua fredda	calorimetrico						che dà la temperatura dell'acqua fredda	avanti il mesceglgio				nell'istante del mesceglgio		dopo il mesceglgio																
																	10' osservata	5' osservata	3' osservata	1' osservata	osservata	corretta T	1' osservata	1' corretta t	2' osservata	4' osservata	6' osservata	8' osservata	10' osservata										
3780	1886 Giugno 12	754,3	757,7	760,3	22,8	G	C	0,0	17,56	+0,0011	−0,0010	−0,0006	6668,08	88,79	1083,78	−0,009	+0,239	23,200	23,200	23,200	23,199	23,1989	23,1538	19,980	19,9470	19,984	19,992	20,000	20,008	20,016	+0,0019	3,2114	+0,259	+0,0193	19,9242	0,99515			
3783	Giugno 15	754,2	757,6	760,0	22,1	G	C	0,0	17, 5	+0,0033	−0,0004	−0,0006	6724,35	88,77	1061,05	−0,009	+0,239	23,170	23,165	23,162	23,160	23,1589	23,1142	20,028	19,9954	20,031	20,036	20,040	20,046	20,050	+0,0007	3,1238	+0,261	+0,0208	19,9729	99574			
3765	Maggio 28	756,5	759,9	762,5	24,0	G	C	0,0	17, 6	−0,0018	−0,0021	−0,0006	6757,72	88,81	1153,39	−0,012	+0,249	23,490	23,491	23,492	23,492	23,4922	23,4472	20,095	20,0660	20,100	20,108	20,118	20,124	20,136	+0,0024	3,3845	+0,245	0,0000	20,0609	99853			
3441	Giugno 12	754,3	757,7	760,5	22,6	G	B	0,0	17,66	+0,0026	−0,0008	−0,0007	6496,00	88,82	1180,32	−0,009	+0,291	23,476	23,472	23,470	23,468	23,4693	23,4215	19,896	19,8630	19,900	19,907	19,912	19,920	19,924	+0,0011	3,5637	+0,311	+0,0193	19,8411	99798			
3789	Giugno 21	747,2	750,6	753,1	21,8	G	C	0,0	17,56	+0,0049	−0,0006	−0,0006	6699,09	88,79	1105,56	−0,009	+0,239	23,392	23,390	23,389	23,389	23,3887	23,3417	20,100	20,0680	20,104	20,112	20,120	20,130	20,136	+0,0018	3,2816	+0,258	+0,0194	20,0456	99490			
3445	Giugno 16	752,1	755,5	756,9	23,5	G	B	0,0	0, 6	−0,0023	−0,0075	−0,0003	6811,56	88,68	639,60	−0,009	+0,291	22,890	22,889	22,888	22,888	22,8878	22,8458	20,946	20,9150	20,948	20,952	20,958	20,960	20,964	+0,0009	1,9372	+0,312	+0,0207	20,8858	99935			
3421	Maggio 23	759,7	763,1	764,8	26,1	G	B	0,0	$\frac{1}{4}$ del serbatoio	−0,0096	−0,0117	−0,0004	6732,85	88,71	871,43	−0,012	+0,311	23,220	23,230	23,236	23,240	23,2422	23,1977	20,600	20,5720	20,604	20,613	20,622	20,631	20,640	+0,0033	2,6335	+0,312	0,0000	20,5566	99716			
3766	Maggio 29	756,4	759,8	762,6	24,2	G	C	0,0	17,65	−0,0016	−0,0014	−0,0007	6774,60	88,82	1183,30	−0,012	+0,249	23,744	23,746	23,747	23,747	23,7484	23,6998	20,248	20,2190	20,252	20,260	20,270	20,276	20,284	+0,0022	3,4835	+0,247	0,0000	20,2147	1,00047			
3428	Maggio 30	757,3	760,7	762,1	24,2	G	B	0,0	principio serbatoio	−0,0036	−0,0103	−0,0003	6766,87	88,68	830,88	−0,012	+0,311	23,144	23,147	23,148	23,149	23,1496	23,1080	20,642	20,6140	20,646	20,653	20,660	20,669	20,676	+0,0022	2,5032	+0,309	0,0000	20,6012	0,99745			
3776	Giugno 8	751,9	757,9	759,3	23,4	G	C	17,6	18, 2	−0,0003	−0,0009	−0,0003	6692,16	89,01	939,75	−0,009	+0,239	23,310	23,310	23,310	23,309	23,3089	23,2627	20,460	20,4290	20,464	20,473	20,480	20,486	20,496	+0,0019	2,8365	+0,254	+0,0138	20,4121	0,99727			





Per dedurre poi il calore specifico vero dell'acqua di grado in grado, invece di valerci separatamente dei risultati di ogni singola esperienza, abbiamo stimato più comodo e più conveniente riunire in gruppi quelle per le quali le medie  $\frac{T+t}{2}$  della temperatura iniziale  $T$  e finale  $t$  del calorimetro, differivano di poco. Abbiamo così divise le nostre esperienze in 61 gruppi, contenenti ciascuno non meno di 8 e fino a 12 determinazioni; in ciascun gruppo abbiamo calcolato la media dei valori di  $\frac{T+t}{2}$ , la media dei valori di  $t$  e la media di  $C_{T,t}$ :  $C_{t,,}$ , cioè del calorico specifico dell'acqua del calorimetro diviso pel calore specifico medio dell'acqua fredda, versatavi. Queste medie sono riportate nella tavola seguente, tav. IX.

## Tavola IX. — ACQUA.

$\frac{t+T}{2}$	$t$	$\frac{C_{T,t}}{C_{t,0}}$	$\frac{t+T}{2}$	$t$	$\frac{C_{T,t}}{C_{t,0}}$
3,80	3,26	0,99882	15,36	13,87	0,99605
4,44	3,87	0,99837	15,71	14,12	0,99595
5,30	4,48	0,99850	16,32	14,83	0,99578
5,69	4,91	0,99845	16,80	15,06	0,99562
6,22	5,26	0,99847	17,14	15,69	0,99575
6,51	5,60	0,99852	17,49	16,16	0,99632
6,86	6,07	0,99856	20,70	19,52	0,99663
7,14	6,19	0,99845	21,33	19,60	0,99671
7,49	6,58	0,99820	21,76	20,26	0,99740
7,83	6,89	0,99795	22,12	20,46	0,99776
8,19	7,07	0,99772	22,56	21,01	0,99765
8,48	7,60	0,99752	22,87	21,21	0,99758
8,80	7,96	0,99735	23,24	21,63	0,99756
9,24	8,18	0,99692	23,47	21,74	0,99757
9,72	8,62	0,99620	23,82	22,14	0,99760
10,44	9,25	0,99575	24,11	22,32	0,99768
10,83	9,69	0,99570	24,49	22,67	0,99787
11,20	9,95	0,99568	24,85	23,04	0,99807
11,56	10,40	0,99569	25,31	23,53	0,99870
11,79	10,54	0,99569	25,70	24,31	0,99957
12,16	10,89	0,99575	26,30	25,05	1,00004
12,51	11,19	0,99585	26,82	25,33	0,99975
12,86	11,59	0,99597	27,18	25,75	0,99951
13,11	11,89	0,99605	27,46	26,05	0,99934
13,33	12,15	0,99610	27,76	26,15	0,99913
13,60	12,60	0,99615	28,15	26,51	0,99903
13,87	12,70	0,99622	28,73	27,05	0,99942
14,17	12,90	0,99624	29,21	27,46	0,99951
14,46	13,07	0,99622	29,79	27,29	0,99932
14,80	13,32	0,99618	30,72	28,73	0,99848
15,08	13,85	0,99614			

Da queste medie abbiamo costruito una curva prendendo per ascisse i valori di  $\frac{T+t}{2} = \theta$  e per ordinate i rapporti  $\frac{C_{T,t}}{C_{t,0}}$ , e ammettendo, come si è fatto anche nei calcoli delle esperienze coi metalli, che il calore specifico medio dell'acqua fra le temperature vicine  $T$  e  $t$ , iniziale e finale del calorimetro, sia uguale

al calore specifico vero alla temperatura intermedia  $\frac{T+t}{2} = \theta$ ; la curva così costruita rappresenta i rapporti fra il calore specifico vero alla temperatura  $\theta$  e il calore specifico medio fra  $0^\circ$  e  $t^\circ$ . Da questa curva che abbiamo potuto con certezza estendere fino al valore  $\theta = 0$  poichè si ha :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{C_\theta}{C_{0,t}} = 1$$

si sono dedotti i valori dei rapporti  $\frac{C_\theta}{C_{0,t}}$  corrispondenti a valori di  $\theta$  di terzo in terzo di grado (la tav. X, ultima colonna, contiene questi valori, ma solo di grado in grado): un'altra curva pochissimo differente da una retta ci ha dato i valori di  $t$  corrispondenti ai valori di  $\theta$  di  $\frac{1}{3}$  in  $\frac{1}{3}$  di grado (tav. X colon. 2°); così insieme ai valori dei rapporti  $\frac{C_\theta}{C_{0,t}}$  siamo venuti a conoscere i valori di  $t$ .

Ora per dedurre  $C_\theta$  da questi rapporti si è preso provvisoriamente come uguale a 1 il calore specifico medio dell'acqua fra  $0^\circ$  e  $3^\circ$  e così dal rapporto  $\frac{C_{3^\circ,33}}{C_{0^\circ,3^\circ}}$  si è potuto dedurre  $C_{3^\circ,33}$ , quindi si è calcolato  $C_{0^\circ,3^\circ,3}$  con la formula

$$\begin{aligned} C_{3^\circ,33} &= \frac{C_0 + C_{0^\circ,33} + C_{0^\circ,66} + \dots + C_{3^\circ} + C_{3^\circ,33}}{11} \\ &= \frac{10 \left( \frac{C_0 + C_{0^\circ,33} + C_{0^\circ,66} + \dots + C_{3^\circ}}{10} \right) + C_{3^\circ,33}}{11} \\ &= \frac{10 C_{0^\circ,3^\circ} + C_{3^\circ,33}}{11} \\ &= \frac{10 + C_{3^\circ,33}}{11} \end{aligned}$$

Calcolato  $C_{3^\circ,33;0^\circ}$ , dal rapporto  $\frac{C_{3^\circ,67}}{C_{0^\circ,3^\circ}}$  abbiamo dedotto  $C_{3^\circ,67}$ , e quindi applicando una formola analoga alla precedente, si è

calcolato  $Co^{3,67}$  e così di seguito abbiamo potuto avere i calorici specifici veri di terzo in terzo di grado.

Per giungere a questo risultato oltre l'approssimazione contenuta nella formula precedente e nelle analoghe di cui abbiamo fatto uso ci siamo dovuti servire anche di un'altra. I valori di  $t$  non progredivano di  $\frac{1}{3}$  in  $\frac{1}{3}$  come quelli di  $\theta$  ma bensì di  $\frac{3}{10}$  in  $\frac{3}{10}$  e così mentre, p. es. avremmo avuto bisogno di conoscere  $Co^{4,2}$  per dedurre  $C^{4,67}$  dal rapporto

$$\frac{C^{4,67}}{Co^{4,2}}$$

noi conoscevamo invece  $Co^{4,33}$  e abbiamo dovuto ammettere che  $Co^{4,33} - Co^{4,2}$ .

Gli errori prodotti da queste approssimazioni erano certo estremamente piccoli e abbiamo così potuto evitare calcoli che per altra via sarebbero riusciti immensamente laboriosi, senza che riescissero di veruna utilità pratica.

Questi valori cominciavano da  $3^{,33}$ ; ma costruendo una curva li abbiamo estesi sino a  $0^{\circ}$ ; li abbiamo poi moltiplicati per una costante in modo da rendere uguale ad 1 il calorico specifico vero a  $15^{\circ}$ , (come si era fatto pel calorico specifico dedotto dalle esperienze coi metalli), così si sono ottenuti i valori registrati nella 3<sup>a</sup> colonna della seguente tavola X.

Tavola X — ACQUA.

$\frac{t + T}{2}$	$t$	$C_{T,t}$	$\frac{C_{T,t}}{C_{4,0}}$
1	0, 9	1,00696	0,99954
2	1, 8	1,00626	0,99926
3	2, 7	1,00561	0,99890
4	3, 6	1,00496	0,99855
5	4, 5	1,00434	0,99821
6	5, 4	1,00374	0,99791
7	6, 3	1,00318	0,99765
8	7, 3	1,00256	0,99736
9	8, 2	1,00205	0,99710
10	9, 1	1,00157	0,99690
11	10,02	1,00113	0,99671
12	10,94	1,00078	0,99664
13	11,86	1,00048	0,99657
14	12,78	1,00023	0,99657
15	13,70	1	0,99655
16	14,64	0,99982	0,99657
17	15,58	0,99968	0,99664
18	16,54	0,99961	0,99674
19	17,50	0,99954	0,99685
20	18,40	0,99949	0,99697
21	19,34	0,99947	0,99708
22	20,28	0,99949	0,99722
23	21,22	0,99954	0,99740
24	22,16	0,99970	0,99768
25	23,10	0,99986	0,99793
26	24,04	1,00005	0,99821
27	24,98	1,00032	0,99857
28	25,92	1,00053	0,99883
29	26,86	1,00085	0,99922
30	27,80	1,00111	0,99952
31	28,74	1,00145	0,99988

Dando ai risultati di queste esperienze un peso uguale a quello della media dei valori ottenuti con le palline metalliche, si è calcolato il calorico specifico vero dell'acqua di grado in grado da 0° a 31°. Vedasi la tavola seguente XI, dove nell'ultima colonna si è scritto il calore specifico medio  $C_{0,\theta}$  fra le temperature 0 e  $\theta$ .

Tavola XI.

$\theta$	$C_{\theta}$ dedotto delle esperienze coll' acqua	$C_{\theta}$ dalle esperienze coi metalli	$C_{\theta}$ media dei due valori precedenti	$C_{\theta}$ dedotta della media precedente
0	1,00777	1,00551	1,00664	
1	1,00696	1,00506	1,00601	1,00632
2	1,00626	1,00460	1,00543	1,00602
3	1,00561	1,00417	1,00489	1,00573
4	1,00496	1,00374	1,00435	1,00545
5	1,00434	1,00333	1,00383	1,00518
6	1,00374	1,00289	1,00331	1,00491
7	1,00318	1,00249	1,00283	1,00465
8	1,00256	1,00211	1,00233	1,00439
9	1,00205	1,00175	1,00190	1,00414
10	1,00157	1,00140	1,00149	1,00389
11	1,00113	1,00109	1,00111	1,00366
12	1,00078	1,00077	1,00078	1,00343
13	1,00048	1,00047	1,00048	1,00321
14	1,00023	1,00022	1,00023	1,00301
15	1	1	1	1,00282
16	0,99982	0,99985	0,99983	1,00264
17	0,99968	0,99969	0,99968	1,00247
18	0,99961	0,99957	0,99959	1,00231
19	0,99954	0,99949	0,99951	1,00216
20	0,99949	0,99946	0,99947	1,00203
21	0,99947	0,99953	0,99950	1,00191
22	0,99949	0,99962	0,99955	1,00180
23	0,99954	0,99974	0,99964	1,00171
24	0,99970	0,99996	0,99983	1,00162
25	0,99986	1,00025	1,00005	1,00155
26	1,00005	1,00058	1,00031	1,00150
27	1,00032	1,00097	1,00064	1,00146
28	1,00053	1,00144	1,00098	1,00144
29	1,00085	1,00201	1,00143	1,00143
30	1,00111	1,00264	1,00187	1,00144
31	1,00145	1,00337	1,00241	1,00147

Abbiamo infine cercato di rappresentare il calorico specifico vero da noi trovato  $C_t$  per mezzo di una formula, e fra le diverse formule che abbiamo provato, quella che meglio si adattava era la seguente :



$$\begin{aligned}
 (1) \quad C_t &= 1,006\,630 \\
 &- 0,000\,593\,962\,t \\
 &+ 0,000\,004\,338\,650\,t^2 \\
 &+ 0,000\,000\,425\,520\,t^3 \\
 &- 0,000\,000\,002\,819\,t^4
 \end{aligned}$$

i valori di  $C_t$  calcolati con questa formula differiscono estremamente poco da quelli dedotti dalle esperienze, come mostra la tavola seguente:

Tavola XII.

$t$	$C_t$		$\Delta =$ $C_t \text{ calc.} - C_t \text{ oss.}$
	calcolato	osservato	
0°	1,006630	1,00664	— 0,000010
1°	1,006041	1,00601	+ 0,000031
2	1,005463	1,00543	+ 0,000033
3	1,004898	1,00489	+ 0,000008
4	1,004350	1,00435	0
5	1,003820	1,00383	— 0,000010
6	1,003307	1,00331	— 0,000003
7	1,002824	1,00283	— 0,000006
8	1,002362	1,00233	+ 0,000032
9	1,001927	1,00190	+ 0,000027
10	1,001522	1,00149	+ 0,000032
11	1,001146	1,00111	+ 0,000036
12	1,000804	1,00078	+ 0,000024
13	1,000496	1,00048	+ 0,000016
14	1,000224	1,00023	— 0,000006
15	0,999990	1	— 0,000010
16	0,999795	0,99983	— 0,000035
17	0,999642	0,99968	— 0,000038
18	0,999530	0,99959	— 0,000060
19	0,999462	0,99951	— 0,000048
20	0,999439	0,99947	— 0,000031
21	0,999463	0,99950	— 0,000037
22	0,999533	0,99955	— 0,000017
23	0,999652	0,99964	+ 0,000012
24	0,999821	0,99983	— 0,000009
25	1,000040	1,00005	— 0,000010
26	1,000311	1,00031	+ 0,000001
27	1,000633	1,00064	— 0,000007
28	1,000967	1,00098	— 0,000013
29	1,001438	1,00143	+ 0,000008
30	1,001921	1,00187	+ 0,000051
31	1,002459	1,00241	+ 0,000049
32	1,003054		
33	1,003668		
34	1,004408		
35	1,005170		

**Esperienze fatte mescolando  
acqua a temperatura dell'ambiente con acqua più calda.**

Le esperienze fatte con questo metodo ebbero per scopo di verificare la formula a cui eravamo giunti coi metodi precedenti.

L'apparecchio consisteva in un calorimetro molto ampio di nichel, con coperchio, ed agitatore simile a quello già descritto per le esperienze con acqua a zero, della capacità di 20 litri. Il calorimetro era munito del solito involucro riflettore, e racchiuso entro un recinto alla Berthelot.

Nel calorimetro s'introduceva una nota massa di acqua riscaldata cinque o sei gradi al di sopra della temperatura dello ambiente; e quando il raffreddamento di quest'acqua agitata era ben regolare, (cioè perfettamente proporzionale ai tempi) s'introduceva una certa quantità di acqua alla temperatura dell'ambiente e si procedeva nel resto come nelle esperienze fatte coll'acqua fredda.

L'acqua alla temperatura dell'ambiente era contenuta in una specie di bottiglia di rame stagnato, munita di agitatore e di termometri calorimetrici; la bottiglia era fissata dentro una larga vasca di zinco contenente circa 40 litri di acqua alla temperatura dell'ambiente.

Aperto (coll'intermezzo di una lunga leva) un largo rubinetto che si trovava in fondo della bottiglia, l'acqua scorreva per un tubo a pareti sottili e quasi verticale, di caucciù, di quattro centimetri di diametro e di 25 centimetri di lunghezza, e veniva condotta nel calorimetro contenente l'acqua più calda: l'acqua impiegava solo pochi secondi a riversarsi nel calorimetro.

Ci si può fare un'idea chiara dell'apparecchio nella figura 4, pag. 123 della sopra citata memoria del Rowland.

Le esperienze eseguite con questo metodo sono esenti da qualunque obiezione.

L'acqua che si versa nel calorimetro avendo la temperatura dell'ambiente, ed una massa considerevole, e venendo versata con rapidità, non può soffrire variazioni di temperatura: inoltre questa temperatura può essere determinata colla stessa preci-

sione con cui si fecero i confronti dei termometri: l'acqua più calda del calorimetro che ha una massa grandissima, si raffredda lentissimamente, e con la più grande regolarità, per cui la correzione relativa al raffreddamento viene esattamente determinata ed è piccolissima, in quantochè l'equilibrio di temperatura del miscuglio, vien raggiunto rapidamente, circa l' dopo avere versato l'acqua della boccia.

Infine gli apparecchi essendo chiusi, l'evaporazione è resa impossibile <sup>1)</sup>).

L'esempio seguente dà un'idea del grado di precisione delle nostre determinazioni.

Firenze 6 maggio 1886.

Ora	Temperatura dell'acqua calda del calorimetro	Temperatura dell'acqua della boccia
11 <sup>ant</sup> 0'	22°, 1824	16, 2104
2	22, 1770	—
4	22, 1719	16, 2108
6	22, 1662	—
8	22, 1614	16, 2110
10	22, 1563	—
12	22, 1506	16, 2110
14	22, 1459	—
16	22, 1405	16, 2112
18	22, 1355	—
20	22, 1304	16, 2116
Alle 11 <sup>ant</sup> 20 si versa l'acqua della boccia del calorimetro.		
11 <sup>ant</sup> 21	20°, 3276	
22	20, 3262	
24	20, 3233	
26	20, 3200	
28	20, 3174	
30	20, 3140	
34	20, 2982	
38	20, 2921	
42	20, 2962	

1) Gli apparecchi furono costruiti con molta cura dalla officina Turchini di Firenze  
Via S. Gallo.

Con questo metodo noi abbiamo eseguito diverse determinazioni.

Per brevità noi ci limitiamo qui a dire che i valori da noi trovati direttamente pel rapporto del calore specifico medio,  $C_{T,\theta}$  fra la temperatura iniziale  $T$  dell'acqua calda del calorimetro e quella  $\theta$  del miscuglio, al calore specifico medio  $C_{e,t}$  fra la temperatura finale  $\theta$  e quella  $t$  dell'acqua della boccia, avente la temperatura dell'ambiente, coincidono con quelli calcolati per mezzo della formula

$$\begin{aligned} Q_t &= 1,006\,630\,000\,t \\ &- 0,000\,296\,981\,t^2 \\ &+ 0,000\,001\,446\,217\,t^3 \\ &+ 0,000\,000\,106\,380\,t^4 \\ &- 0,000\,000\,000\,564\,t^5 \end{aligned}$$

che si deduce dalla formula (1), come può vedersi nella memoria originale.

Il Rowland a pag. 125-129 della sua notevole memoria (*On the mechanical equivalent of heat*, Cambridge 1880) riferisce 9 determinazioni del rapporto del calore specifico medio dell'acqua fra temperature comprese fra  $0^\circ$  e  $36^\circ$ .

Noi abbiamo voluto confrontare i valori trovati dal Rowland con quelli dedotti dalla nostra formula (2), e l'accordo è piuttosto soddisfacente come può vedersi dalla tavola a pag. 94 della nostra Memoria originale.

Il Rowland nella sua notevole memoria (*On the mechanical equivalent of heat*) pag. 196, Tavola LIV, dà i valori dell'equivalente meccanico  $E_t$  riferito alla caloria presa alle diverse temperature dell'acqua fra  $+5^\circ$  e  $+36^\circ$ . Da questa tavola si deduce il calore specifico dell'acqua a queste stesse temperature. I valori così calcolati non sono molto diversi da quelli da noi trovati, col metodo delle palline grandi di rame.

Nella tavola seguente sono trascritti i valori di  $E_t$  (seconda colonna) quelli del calore specifico secondo Rowland, (ottenuti dividendo  $E_t$  per  $E_{11}$ ), e quelli del calore specifico trovato da noi col metodo delle palline grandi di rame: il minimo del calore specifico corrisponde a  $+29^\circ$  secondo Rowland, ed a  $+27^\circ$  nelle nostre esperienze con le palline grandi di rame. Noi però

riteniamo che i nostri risultati ottenuti, con sette metodi diversi, precisino il minimo a  $+ 20^{\circ}$ ; e che i valori del calore specifico dedotto dalle nostre misure eseguite con tutte le cure prescritte dalla termometria moderna con questi sette metodi diversi, siano di gran lunga più attendibili di quelli ottenuti da tutti i fisici che ci precedettero in questo studio.

Giova ricordare che lo stesso Rowland scriveva (pag. 107 della sua *Relazione critica sulle varie determinazioni dell'equivalente meccanico della caloria*):

« La temperatura del minimo non può dirsi conosciuta, benchè io l'abbia collocata temporaneamente verso  $30^{\circ}$ , ma essa può essere ben differente ».

t	E <sub>t</sub>	Calore specifico vero a $t^{\circ}$	
		esperienze del Rowland	Nostre determinazioni (col rame, palline grandi)
5°	429,8	1,00561	1,00415
6	429,5	1,00491	1,00360
7	429,3	1,00444	1,00309
8	429,0	1,00374	1,00263
9	428,8	1,00327	1,00219
10	428,5	1,00257	1,00173
11	428,3	1,00210	1,00136
12	428,1	1,00163	1,00090
13	427,9	1,00117	1,00055
14	427,7	1,00070	1,00028
15	427,4	1,00000	1,00000
16	427,2	0,99953	0,99975
17	427,0	0,99906	0,99945
18	426,8	0,99859	0,99919
19	426,6	0,99812	0,99901
20	426,4	0,99766	0,99880
21	426,2	0,99719	0,99873
22	426,1	0,99696	0,99860
23	426,0	0,99672	0,99850
24	425,9	0,99649	0,99844
25	425,8	0,99625	0,99837
26	425,7	0,99602	0,99834
27	425,6	0,99578	0,99832
28	425,6	0,99578	0,99834
29	425,5	0,99555	0,99837
30	425,6	0,99578	0,99848
31	425,6	0,99578	0,99871

Oltre ai metodi precedenti, adoperammo anche quello del riscaldamento di una massa di acqua a zero (circa mezzo chilogrammo, entro un recinto a  $100^{\circ}$  ma abbandonammo questo metodo, per la incertezza nella lettura esatta delle temperature, e per quella più grande della correzione da applicare alla temperatura letta, per lo spostamento dello zero.

Molte particolarità che non si sono potute spiegare nella precedente memoria, onde non renderla troppo lunga, si troveranno nella memoria originale, pubblicata negli *Atti dell' Accademia Gioenia di Catania* serie IV, vol. IV, e nelle seguenti memorie e note che le fanno seguito, le quali furono già comunicate alla stessa Accademia nelle sedute di questo anno:

1°. Sulla variabilità del calore specifico del mercurio fra  $0^{\circ}$  e  $+32^{\circ}$ .

2°. Studio dei termometri calorimetrici.

3°. Sulle correzioni per il raffreddamento, nelle determinazioni calorimetriche.

4°. Sulla costituzione degli elettroliti e sulla variabilità del loro calore specifico con la temperatura <sup>1)</sup>.

*Istituto Físico della Università di Catania, 1892.*



1) Tutte le nostre misure sono riferite al termometro ad azoto, è facile peraltro ridurle al termometro a idrogeno, col mezzo delle tavole dato dal sig. Chappuis (*Travaux et mémoires* t. III, pag. D. 38; 1884) e così pure potrebbero ridursi alla scala assoluta. — Compara W. Thomson e Joule, On the thermal effects of fluids in motion, (*Phil. Trans.* 1853, 1854, 1863).

Jochmann, Beiträge zur Theorie der Gase (*Schönmilch Zeitschrift für Math. und Phys.* t. V, p. 24 e 96, 1860).

B. Weinstein, Ueber die Reduktion der Angaben von Gasthermometern auf absolute Temperaturen (*Metronomische Beiträge*, n° 3, 1881).

Compara anche Ch. E. Guillaume, *Traité de la thermométrie de précision*.

INTORNO AD ALCUNE MODIFICAZIONI DELL'ELETTROMETRO A QUADRANTE  
DEL THOMSON; NOTA DEL PROF. EMILIO VILLARI. •

Nell'elettrometro a quadrante del Thomson e nelle sue svariate forme si suole adoperare, per spegnere le oscillazioni del suo indice, l'acido solforico; ma esso lo fa oscillare spesso capricciosamente, e rende difficile il suo ritorno allo zero; onde l'istrumento è di uso penoso e spesso difficile.

Il Donati ed il Curié pensarono di adoperare un freno elettromagnetico; e sostituirono delle lastre di acciaio magnetizzate a quelle di ottone dello elettrometro di Branly, ma non ne ebbero grandi vantaggi. In seguito, lo stesso Donati cercò di migliorare il suo apparecchio; ed il Carpentier, nel 1887, costruì, sul medesimo principio, diversi elettrometri molto complicati, e destinati principalmente per uso industriale.

Io, avendo avuto bisogno di un elettrometro esatto, per alcune mie esperienze, e non essendomi potuto servire d'un elettrometro Thomson-Mascart per la irregolarità delle sue indicazioni, ne ho fatto costruire uno con freno elettromagnetico; esso, oltre ad essere assai semplice, è altresì molto sensibile e pratico, onde lo descriverò qui in seguito.

L'elettrometro è disegnato nella fig. 1 (*Tav. VII*). Una base circolare di ottone può girare intorno al proprio asse sopra un piede a viti di livello, e vi si può fissare mediante la vite V. Sulla base sono fissate una forte calamita di quattro spranghe di acciaio, e due colonne BB, che sorreggono il coperchio D. Questo, nel centro porta un tubo di vetro masticiato in una ghiera di ottone, la quale può girare intorno al proprio asse, o lentamente per via di una vite *v*, o rapidamente a mano, dopo aver tirato, in avanti della figura, la vite *v*, che da una molla antagonista è pigiata contro la ghiera intagliata a madre vite. In alto il tubo termina in una ghiera di ottone *g*, nella quale si fissa un grosso turacciolo di paraffina *pp*, (V. anche fig. 2), con un ampio foro longitudinale, in cui si fissa il pezzo di ottone *cc* che porta la carrucola *o*. Fra la carrucola e l'asse si stringe, a vite uno dei capi del filo di sospensione; il quale passa in una fenditura della car-

rucola e allogasi nella sua gola. Il pezzo che regge la carrucola è tagliato per lungo, ed il filo striscia contro l'angolo acuto della fenditura, come nei galvanometri, così da rimanere sempre centrato. Il filo di sospensione, chè è di argento e sottilissimo, si manda giù per la canna di vetro con un peso, e serve a sostenere l'indice, come si dirà.

Ad esperienze finite, si pone sulla ghiera *g* un coperchio *Q* di ottone, per riparare dalla polvere la parte superiore dell'istrumento.

Alla parte inferiore del disco *D* sono fissate quattro colonne di vetro, con apposite ghiera di ottone a vite, le quali sorreggono i soliti quadranti dalla loro base inferiore, come vedesi nella figura. I quadranti alterni sono uniti fra loro con fili di rame avvolti a spira. I due anteriori portano due colonnine di ottone, che passano liberamente per fori praticati nel disco *D*, e vengono a terminarsi nei due serragli *s, s*, che costituiscono gli elettrodi dell'apparecchio. Due piccoli coperchi scorrevoli lungo le colonnine possono, ad esperienza finita, abbassarsi e chiudere i rispettivi fori. I due quadranti posteriori possono facilmente allontanarsi fra loro, essendo le colonnette che li sorreggono, insieme alle loro ghiera, scorrevoli in due fenditure praticate nel disco *D*. In tal modo riesce facile estrarre od introdurre l'indice nei quadranti; i quali sono, come è noto, specie di scatole che comprendono l'indice.

L'indice è della solita forma, indicata nella fig. 3, e porta nel mezzo una piccola fenditura, mercè la quale può agganciarsi su di un filo d'alluminio, grosso 1.5 mm. ed esserci stretto con due madreviti di alluminio. Il filo d'alluminio, con un uncino, s'aggancia in alto al filo di sospensione, ed in basso sostiene a vite un tubo di alluminio *T*, alto 30 mm., di 30 mm. di diametro, e grosso  $\frac{1}{2}$  mm., che oscilla fra i poli della calamita.

Tutto l'apparecchio, fra la base ed il coperchio *D*, viene rinchiuso in un manicotto di ottone diviso e maschiettato così che possa aprirsi e chiudersi con facilità. Esso ha in alto due finestre oblunghe, chiuse da lastre di mica, perchè possa esser veduto l'interno dello strumento; e nel mezzo ha un grosso foro circolare, chiuso da una lastra di vetro piana, per osservare uno



specchietto  $n$  addossato all'indice, perchè se ne misurino, con la scala ed il cannocchiale, le deviazioni.

La costruzione del tubo di alluminio merita cure speciali, ad evitare che esso, per l'azione del magnete, acquisti una forza direttrice a cagione forse delle impurezze dell'alluminio del commercio e nuoccia alle indicazioni dell'istrumento. In principio fissai in alto del tubo una staffa di alluminio, con la quale lo fissavo al filo dell'indice; ma essa era un po' attratta dalla calamita. Dopo varii tentativi la sostituii con un dischetto di sughero che è affatto neutro all'azione magnetica. I bordi della lastra che forma il tubo devono essere ben netti, riuniti strettamente con più chiodi di alluminio ribaditi, e la giuntura deve essere disposta equatorialmente.

Non ostante queste cure, se l'azione del magnete si rinforza oltre misura sul tubo, sia per espansioni polari, sia introducendo nel tubo un nucleo di ferro così da concentrarvi le linee di forza, sia adoperando un tubo di alluminio molto lungo, si appaleserà in esso una forza direttrice che perturberà le indicazioni dello apparecchio.

Per mettere in evidenza queste perturbazioni operai nel modo che segue.

Nelle mie ricerche, con questo istrumento, ho preferito caricarne stabilmente i quadranti con una pila, e caricare l'indice col corpo da esplorare, e ciò per due ragioni; la prima è che riesce più facile isolar bene l'ago che i settori, onde non occorre disseccare l'interno dell'elettrometro; e la seconda è, che le deviazioni, in tal caso, sono direttamente proporzionali al potenziale della carica dell'indice, come mostra la teoria.

A caricare i settori adoperai, di solito, una pila di 80 elementi, rame, zinco acqua comune, fatta con vasetti di porcellana confitti nella paraffina. In seguito adoperai una pila di 100 elementi simili, fatti con tubi di vetro alti 5 centim., larghi 15 mm. e confitti del pari, nella paraffina. I poli di detta pila erano uniti agli elettrodi  $s, s$ , dell'elettrometro ed il mezzo di essa al suolo, per via di un filo di rame fissato ad un chiodo confitto nel muro. Non è bene, come ha osservato il Felici con un elettrometro Thomson-Mascart, stabilire la comunicazione col suolo per mezzo dei tubi del gas. Col caricare così i settori l'indice, osservato al

cannocchiale, si sposta poco o punto, se fu avanti disposto simmetricamente rispetto ad essi. In ogni caso esso può riportarsi allo 0° spostando di qualche pila il centro della loro comunicazione col suolo, e movendo di pochi millimetri il cannocchiale.

Disposto così l'elettrometro ne caricavo l'indice, ora con un solo elemento Daniell, ed ora con 5 elementi identici disposti in serie.

Ed è manifesto che con 5 elementi la deviazione deve essere quintupla di quella prodotta da uno solo, se l'apparato funziona regolarmente. Delle deviazioni prendevo le definitive, ottenute riunendo l'indice ora all'uno ed ora all'altro dei poli della pila, tenendo sempre il polo libero in comunicazione col suolo.

Le diverse comunicazioni si stabilivano mercè un inversore a mercurio isolato sull'ebanite.

Feci così tre serie di esperienze, delle quali do qui solo alcuni dei risultati medii ottenuti.

1. Rinforzata l'azione magnetica sul tubo d'alluminio, avendovi introdotto un cilindro di ferro sostenuto da una colonna di ottone, si ottennero i seguenti risultati:

Deviazione prodotta da 1 el. Daniell <sup>1)</sup>	117,4
» » » 5	$597,8 \div 5 = 119,5$

Tolto il cilindro di ferro ed aggiunto alla calamita due espansioni polari, abbraccianti il tubo di alluminio, s'ebbe

Deviazione prodotta da 1 el. Daniell	116,8
» » » 4	$478,9 \div 4 = 120,0$

Rinforzata l'azione del magnete sul tubo di alluminio adoperandone uno lungo 60 mm., invece di quello di 30 mm. s'ottenne

1) Le deviazioni indicate rispondono alla somma delle deviazioni definitive ottenute, a destra ed a sinistra, per l'azione dei due poli della pila successivamente uniti all'Elettrometro.

Deviazione per 1 el. Daniell

146

» » 5

770 : 5 = 154 <sup>1)</sup>

Dai dati precedenti si scorge, che le deviazioni crescono un poco più rapidamente dei potenziali comunicati all'indice. Ne migliori risultati s'ottennero facendo uso di un disco di alluminio oscillante sopra i poli della calamita, che più fortemente si dirigeva e più sensibili erano le perturbazioni.

In tutti questi casi l'aperiodicità era assoluta, le oscillazioni erano lenti e bisognava attendere un certo tempo per assicurarsi che l'oscillazione erasi compiuta. Ottenni, invece, risultati eccellenti adoperando soltanto il tubo d'alluminio alto e largo 30 millimetri, fissato all'asse dell'indice mercè il solito dischetto di sughero. Ed ecco le medie di alcuni risultati, assai concordi fra loro, ottenuti con le solite pile Daniell.

Serie di esperienze	N. Daniell	Deviazioni	Deviazioni per un elem. Daniell	Deviaz. medie per un elem. Daniell
I	1	129,7	129,7	130,1
	5	645,9	129,2	129,5
	1	130,6	130,6	
	5	649,1	129,8	
II	5	622,5	124,5	124,6
	1	124,5	124,5	124,6
	5	624,2	124,8	
	1	124,8	124,8	
III	1	114,66	114,66	114,7
	5	574,8	114,96	115,0
	1	114,66	114,66	

Dai precedenti numeri e da molti altri, che per brevità non riporto, si scorge che la deviazione prodotta da 5 el. è esattamente quintupla di quella di un solo elemento: così che la F. E. M. ricavata da 1 o da 5 elementi è la medesima. Onde può

1) La differenza delle deviazioni ottenute nei tre casi su citati tiene ad una ragione che dirò in seguito.

dirsi che in questo elettrometro le deviazioni sono proporzionali al potenziale delle cariche comunicate al suo indice.

Il piccolo tubo di alluminio, detto qui sopra, rende l'istrumento quasi affatto aperiodico; così che l'ago, anche nelle massime deviazioni, retrocedeva prima di alcuni centimetri, poi di qualche millimetro, e quindi si fermava in modo che le osservazioni potevano eseguirsi rapidamente.

In seguito, volli sperimentare con un tubetto di rame ottenuto elettroliticamente, alto e largo 30 mm. e sottilissimo, per averlo leggiero. Esso però, forse perchè troppo sottile, agiva debolmente come freno, e fu necessario rinforzare il campo magnetico introducendo nel tubo un cilindro di ferro fissato ad apposito sostegno. Così s'ottenne una aperiodicità presso a poco eguale a quella ottenuta col tubo d'alluminio precedente. Ecco alcuni dei risultati medii di più misure.

Serie di esperienze	N. Daniell	Deviazioni	Deviazioni per un elem. Daniell
I	1	85,5	85,5
	5	429,0	85,8
II	1	86	86
	5	428	85,6
III	1	86,8	86,8
	5	433	86,7

I valori dell'ultima colonna possono ritenersi eguali fra loro; così prendendo la media deviazione dovuta ad un solo elemento, e quella ricavata, prendendo la quinta parte della deviazione dei 5 elementi, s'ottengono i numeri 86,1 ed 86,05, che sono del tutto identici. Ondè, anche col tubo di rame, le deviazioni sono proporzionali ai potenziali delle cariche impartite all'indice.

Il tubo di rame pesava gr. 7,5 e quello di alluminio gr. 4,7.

Elettrometro a più indici.

Un'altra modificazione importante fu di adoperare tre indici invece di quello unico, che si suole usare. Essi sono tagliati della

forma ordinaria, e ciascuno porta nel mezzo, come si disse, una piccola fenditura, per la quale può adattarsi e stringersi a vite sull'asse comune. Gli indici fissati sull'asta, uno sotto dell'altro, sono disposti uno al disotto, uno nell'interno e l'altro al disopra dei settori, e per quanto è possibile vicinissimi ad essi. L'uso di questi tre indici ha due spiccati vantaggi. Il primo è più importante ed è, che la sensibilità dell'elettrometro si accresce grandemente; ed il secondo è, che riesce oltremodo facile disporre i tre indici simmetricamente, rispetto ai quadranti, essendo due di quelli disposti all'esterno di questi. E per tale orientazione riesce assai comoda la vite  $v$  che impartisce al tubo  $t$  ed al filo di sospensione dei movimenti lenti e misurati.

Ad osservare l'efficacia del numero degli indici, nell'accrescere la sensibilità dell'elettrometro, feci varie misure delle quali qui trascrivo alcuni dei risultati medii ottenuti.

I	Deviazioni con tre indici	211,5
	» con l'indice interno e superiore <sup>1)</sup>	115,0
	» con l'indice interno	60,0
II	» con l'indice interno ed inferiore	114,6
	» con l'indice inferiore	81,7

Da questi numeri si scorge come cresce la sensibilità col numero degli indici: essa è massima con 3, ed è minima con un solo: e fra loro l'interno pare abbia la minore efficacia <sup>2)</sup>. Però queste indicazioni non possono ritenersi come assolute, giacchè esse sono grandemente modificate dalla distanza degli indici esterni dalle superficie dei settori, come può rilevarsi dai numeri che seguono.

	Deviazioni
I Solo indice inferiore vicinissimo ai settori	130,0
» abbassato di un mm.	61,6
» » ancora di 1 mm.	43,0
» » » 3 mm.	19,5
II Indice interno ed inferiore vicinissimo ai settori	241,0
» » abbassati di 1 mm.	129,0

1) L'indice superiore non potè molto avvicinarsi ai settori per le basi delle colonnette che sostenevano questi settori nel primitivo apparecchio che feci costruire.

2) Tutte le esperienze indicate in questo scritto furono fatte con un elettrometro a tre indici.

Per accrescere, adunque, la sensibilità dell'elettrometro è necessario che gli indici siano molto prossimi ai quadranti; e questi vennero, in un secondo elettrometro, sostenuti dalla loro base inferiore slargata, come è espresso nella figura, per potere avvicinare ad essi gli indici esterni: e col modificare la distanza suddetta, si ha modo di modificare la sensibilità dell'elettrometro. Ed è manifesto che le misure eseguite sono comparabili fra loro solo quando eseguite in condizioni identiche dell'istrumento. La differenza delle deviazioni, indicata nella nota a pag. 243 è dovuto alla diversa distanza degli indici dai quadranti.

Come dissi più sopra, nelle mie esperienze, caricai i settori con le 80 piline e gli indici col corpo da esplorare. Ma le misure possono farsi, altresì, caricando gli indici stabilmente con le piline ed i quadranti col corpo da esplorare. In questo caso, per ottenere le deviazioni proporzionali al potenziale esplorato, è necessario che quello dell'indice sia elevatissimo. Il mio elettrometro può adoperarsi anche in questa maniera ed in tutti quegli altri modi che possono usarsi gli altri elettrometri di simile natura.

Per stabilire dei confronti misurai i potenziali di alcuni elementi adoperando i due metodi su indicati.

La prima serie di misure fu fatta caricando i settori con le 80 piline e gli indici con gli elementi da esaminare: ed i risultati sono riportati nello specchietto che segue. In esso ho trascritto le deviazioni definitive a destra ed a sinistra, rispondenti all'azione dei due poli di ciascuno elemento, a fine di mostrare la quasi completa simmetria dell'istrumento. Sono inoltre riportate le deviazioni somme e le F. E. M. degli elementi esaminati; giacchè prendendo la somma delle due deviazioni, in senso inverso, s'evitano i difetti di simmetria e d'orientazione dell'apparato.

Nomi delle pile	DEVIAZIONI			F. E. M.
	Destra	Sinistra	Somma	
Normale	67,5	68,5	136,0	1,00
Daniell	71	72,5	143,5	1,05
Volta	64	65	129	0,95
Leclanché	88	87	175,8	1,29
	88	88,5		
Grenet	128,5	128,0	256,5	1,87

Nel confronto delle varie F. E. M., dello specchio precedente, si prese per unità quella di un elemento formato di zinco in lastra, amalgamato, di rame, in lastra, coperta da rame elettrolitico, immersi in soluzioni sature di solfato di zinco e di solfato di rame puri. Tale elemento ha, come si sa, la forza di circa 1 volta. Negli altri elementi s'adoperò acqua acidulata al 5 %, in volume: lo zinco della Daniell fu amalgamato: l'acido nitrico era a 40°; la Leclanché aveva una soluzione non satura di sale ammoniaco: e la Grenet fu caricata con una soluzione di 130 gr. di bicromato in un litro d'acqua e 370 gr. di acido solforico.

Con le stesse pile, caricate egualmente, sperimentai in altro giorno con lo stesso elettrometro, del quale caricai l'indice con le 80 piline ed i settori con gli elementi da esaminare; ed ottenni i dati riuniti nel seguente specchietto, disposto come il precedente:

Nomi delle pile	DEVIAZIONI				F. E. M.
	Destra	Sinistra	Somme	Somme medie	
Normale	44	45,0			
	44	44,5	89,0	88,5	1,00
	44	44,5			
Daniell	48,5	49,5	97,6	97,4	1,10
	48,5				
Volta	43	43,5	86,5	86,5	0,98
Leclanché	56	56	112,2	112,2	1,27
	56	56,5			
Grenet	83	83	166,0	166,0	1,88
Grove	83	84	167		
	83,5	83,5	16,90	167	1,88
Bunsen	81,7	81,7	163,4	163,4	
Daniell	49	48,2	97,2		
Normale	44,2	44	88		
	44	44			

Questi valori delle F. E. M. concordano bene con quelli della precedente tabella. Quindi l'apparecchio può adoperarsi indistintamente nei due modi. Nonpertanto credo preferibile di caricare i settori con le piline e gli indici col corpo da esaminare, perchè, come si disse, in tal caso le deviazioni sono sempre proporzionali ai potenziali da misurare, e anche perchè non bisogna preoccuparsi dell'assoluto isolamento dei settori sempre difficile potendosi rendere facilmente quasi perfetto quello dell'indice, nel modo più sopra indicato da me: ed anche perchè in questo modo riesce più facile disporre l'apparato a 0°, senza che si muova sensibilmente quando con le piline se ne caricano i quadranti.

La sensibilità dell'apparecchio può variare in limiti assai estesi, col variare il numero delle piline, col variare il numero degli indici, che possono facilmente togliersi od aggiungersi: e finalmente anche coll'abbassare più o meno l'indice inferiore,



quando gli altri due siansi tolti. Inoltre esso può adoperarsi come elettrometro balistico, ove mai occorre, sopprimendo il tubo di alluminio.

Tutte le precedenti esperienze furono eseguite con un primo modello di elettrometro. In seguito lo migliorai sensibilmente, tanto che esso divenne assai più squisito. I quadranti furono fatti di 4 a 5 mm. d'altezza interna, mentre nel primo erano alti circa 10 mm. Inoltre l'isolamento dell'indice, nel primo apparato era fatto con ebanite e nel secondo con un tappo di paraffina: e, finalmente le pile furono ridotte moltissimo nelle loro dimensioni, giacchè le costruii, come già dissi, con dei tubi alti 5 cm. e di 1,5 mm. di diametro, i quali erano confitti in uno strato di paraffina contenuto in una cassetta di legno. 100 di tali elementi (acqua ordinaria rame e zinco) erano contenuti in una cassetta  $30 \times 30 \times 10$  cm.

Ad avere una idea dell'isolamento raggiunto nel nuovo strumento senza averne disseccato l'interno, lo caricai con una pila e quindi misurai il decremento della deviazione col tempo, ed ottenni le seguenti indicazioni.

Ore	Deviazioni	Decremento in 1' minuto di
2 p.	144	
		1°,40
2,10'	130	
		1, 08
2,22	117	
		1, 00
2,30	109	
		0, 90
3,13	70	

Per dare una idea dell'accresciuta sensibilità del nuovo strumento rispetto al primo dirò, che, mentre il vecchio deviava di 175,8 per un elemento Leclanchè, il nuovo, in condizioni presso a poco identiche, dava invece una deviazione di 246, avendo caricato i settori con le solite 80 piline.

Ripetute le stesse esperienze col nuovo strumento dopo avere avvicinati, per quanto era possibile, gli indici esterni ai settori,

e caricando i settori con una cassetta di 100 elementi, si ebbe con la medesima Leclanchè, una deviazione di 397 a 398 mm. di deviazione <sup>1)</sup>.



RISULTATI DELLE MISURE PER LA COSTRUZIONE  
DELLA CARTA MAGNETICA DELLA SVIZZERA ; DI A. BATTELLI.

Cominciai nell'agosto del 1888 le misure degli elementi del magnetismo terrestre in molti paesi della Svizzera, per costruire la carta magnetica di quella regione. Le misure furono terminate nell'agosto del 1892, facendo in totale settanta stazioni.

I risultati dettagliati delle determinazioni vengono pubblicati negli "*Annali della Meteorologia Italiana* „ e un sunto esteso è stato già riportato negli "*Atti dell'Istituto Veneto di Scien. Lett. ed Arti* „. Qui darò i risultati finali, accennando soltanto agli strumenti di cui feci uso.

Per la misura dell'inclinazione adoperai un inclinometro costruito a Kew sotto la direzione di Whipple; il quale, come tutti gl'inclinometri costruiti a Kew, era fornito di due aghi calamitati. In ogni stazione eseguii le misure con ambedue gli aghi: i valori riferiti nelle seguenti tabelle sono la media delle due determinazioni.

Per la misura della declinazione e dell'intensità orizzontale adoperai un magnetometro unifilare del modello immaginato dal Chistoni (1883), e costruito dallo Schneider di Vienna. Prima di ciascun viaggio determinai accuratamente le costanti relative alle varie parti dello strumento. Insieme al magnetometro (per determinare in ogni stazione l'azimut astronomico di una mira fissa, col metodo delle altezze assolute del sole), io portava meco

1) Questi apparati furono costruiti dal mio meccanico sig. Giuseppe Caputo, con gran perfezione ed eleganza di forma. Il prezzo del solo elettrometro è di lire 800, e quello delle 100 piline in cassetta di mogano con coperschio di vetro è di lire 60.

anche un buonissimo cronometro a tempo medio, che batteva il mezzo secondo.

Avanti di cominciare le determinazioni in ciascun luogo, io mi assicuravo che non vi fossero cause perturbatrici, che potessero mascherare i giusti valori degli elementi magnetici. A tal uopo mi servivo di uno squadro agrimensorio. Il cannocchiale che vi era annesso dava l'approssimazione di  $1''$ , e la base superiore su cui era mobile l'ago calamitato, era graduata di  $30'$  in  $30'$ , onde potevo avere l'esattezza di  $3'$  facendo le letture mediante una lente. Io collocavo lo squadro in una posizione A, e miravo poi col cannocchiale un punto P, molto lontano e ben definito.

Determinavo quindi l'angolo  $\alpha$  che faceva l'ago calamitato con l'asse del cannocchiale (che era posto nello stesso piano verticale con la linea diametrale segnata sul circolo graduato).

Di poi, sotto allo strumento, disponevo un bastone che per mezzo di un braccio sosteneva un filo a piombo, in modo che la punta  $p$ , che si trovava all'estremità superiore del filo, rimanesse, per quanto era possibile, verticale e coincidesse col centro della base dello strumento. E dopo di questo fissavo nel terreno in B, alla distanza di dieci o dodici metri circa da A, un altro bastone simile, in guisa che la punta  $p$  apparisse verticale e il filo a piombo guardato attraverso alle due fessure dello squadro che avevano la direzione dell'asse del cannocchiale, rimanesse coperto dai due fili di cui erano munite le fessure medesime.

Allora trasportavo lo strumento da A in B, badando di collocarlo in guisa nella nuova posizione che la punta  $p$  del secondo bastone riuscisse molto prossimamente nel centro della base dello strumento, e determinavo il nuovo angolo  $\alpha'$  che l'ago calamitato faceva coll'asse del cannocchiale diretto verso la mira P.

Se  $\alpha'$  riusciva uguale ad  $\alpha$ , si poteva concludere che in B non v'erano cagioni accidentali che influissero sul valore degli elementi del magnetismo terrestre, tanto da far variare la declinazione più di  $3'$ .

Tuttavia, in qualche caso incerto, trasportai lo squadro anche in una terza posizione C, ad angolo retto con la direzione AB, valendomi per questo delle due fessure situate nel piano perpendicolare al piano verticale passante per l'asse del cannoc-

chiale. Determinavo l'angolo  $\beta$  fatto dall'ago calamitato con la direzione CP, e misuravo poi l'angolo della direzione CP con la CB, facendo ruotare la parte superiore dello squadro intorno al proprio asse, e mirando quindi col cannocchiale la punta  $p$  del bastone collocato in B. Onde poter escludere cause estranee che potessero influire sul valore dell'inclinazione, bisognava che fosse

$$\beta - \frac{\pi}{2} + \gamma = \alpha'.$$

Questa precauzione, di assicurarmi cioè dell'assenza di azioni locali che turbassero le misure magnetiche, mi è stata di grande vantaggio in alcune stazioni, e specialmente al Gran San Bernardo ed a Biel, dove nel luogo scelto a tutta prima, avrei ottenuto risultati inesatti.

STAZIONI	Latitudine N	Longitudine E DA PARIGI	Inclinazione	Epoca
Aosta . . .	45° 44' 26"	5° 01' 02"	62°	22 Agosto 1888
St. Remy . . .	45 50 07	4 52 53	62 26,7	23 »
Gran S. Bernardo .	45 52 03	4 49 47	62 31,9	24 »
Liddes . . .	45 59 29	4 51 15	62 33,1	25 »
Martigny (I) . . .	46 05 50	4 44 28	62 37,1	26 »
» (II). . .	46 05 47	4 44 02	62 37,1	26 »
Sion . . .	46 13 31	5 01 12	62 38,5	27 »
Brieg (I) . . .	46 19 08	5 39 11	62 40,6	27 »
» (II) . . .	46 19 00	5 39 28	62 47,0	28 »
Villeneuve . . .	46 23 34	4 35 11	62 49,4	29 »
Losanna (I) . . .	46 31 28	4 17 08	63 18,4	29 »
» (II) . . .	46 30 57	4 17 27	63 14,5	30 »
Thonon . . .	46 23 12	4 08 40	62 50,8	30 »
Ginevra (I) . . .	46 10 51	3 48 15	62 48,6	1 Settembre 1888
» (II) . . .	46 11 27	3 49 13	62 53,1	2 »
Cluses . . .	46 03 00	4 14 56	62 39,8	3 »
Iverdon . . .	46 47 24	4 18 13	63 12,4	5 »
Estevayer . . .	46 51 11	4 30 20	63 14,7	5 »
Neuchâtel (I). . .	46 59 24	4 35 46	63 18,6	6 »
Friburgo . . .	46 48 10	4 49 00	63 13,8	7 »
Bulle . . .	46 37 31	4 43 23	63 04,8	8 »
Berna . . .	46 58 00	5 06 58	63 16,0	9 »
Interlaken (I). . .	46 40 13	5 31 17	63 02,2	10 »
Langnau. . .	46 56 28	5 26 33	63 14,1	11 »
Biel (I). . .	47 08 58	4 54 42	63 26,9	12 »
» (II) . . .	47 08 03	4 54 07	63 27,6	12 »
Delenont . . .	47 21 41	5 00 11	63 26,1	13 »
Porrentruy . . .	47 25 10	4 43 44	63 43,5	14 »
Basilea (I) . . .	47 34 17	5 15 04	63 47,6	15 »
Olsen . . .	47 20 39	5 34 37	63 32,1	16 »
Castello di Wartbourg	42 20 02	5 35 00	63 31,2	16 »

Segue 1888.

STAZIONI	Latitudine N	Longitudine E DA PARIGI	Inclinazione	Epoca
Brügg . . .	47° 29' 03"	5° 22' 47"	63° 34' 6	17 Settembre 1888
Zurigo . . .	47° 21' 15	6° 13 32	63° 26 1	18 » » »
Winterthur . . .	47° 30' 18	6° 23 39	63° 31 8	20 » » »
Wyl . . .	47° 27' 25	6° 42 10	63° 27 5	21 » » »
Sciaffusa . . .	47° 42' 11	6° 17 31	63° 41 8	22 » » »
Costanza . . .	47° 39' 57	6° 50 33	63° 36 6	23 » » »
Romanshorn . . .	47° 34' 17	7° 02 50	63° 31 2	24 » » »
Santa Margherita . . .	47° 27' 17	7° 17 45	63° 24 8	25 » » »
Buchs . . .	47° 10' 11	7° 07 23	63° 11 2	26 » » »
Coira . . .	46° 51' 07	7° 11 10	63° 1 2	27 » » »
Andeer . . .	46° 36' 06	7° 05 21	62° 47 1	28 » » »
Wesen . . .	47° 08' 22	6° 46 46	63° 15 4	29 » » »
Linththal . . .	46° 55' 14	6° 39 45	63° 1 6	30 » » »
Rapperschwyl . . .	47° 13' 22	6° 28 53	63° 17 8	1 Ottobre
Righi-Kulm . . .	47° 03' 45	6° 09 04	63° 14 0	1 » » »
Arth-Goldau (I) . . .	47° 02' 37	6° 13 05	63° 12 1	2 » » »
» (II) . . .	47° 03' 13	6° 12 26	63° 12 8	3 » » »
Lucerna . . .	47° 02' 48	5° 58 50	63° 11 6	4 » » »
Flüelen . . .	46° 53' 49	6° 17 02	63° 4 2	5 » » »
Göschenen . . .	46° 40' 02	6° 14 43	62° 56 9	6 » » »
Airolo (I) . . .	46° 31' 57	6° 15 48	62° 43 1	7 » » »
Bodio . . .	46° 22' 37	6° 35 04	62° 36 0	8 » » »
Bellinzona (I) . . .	46° 11' 20	6° 41 54	62° 29 7	9 » » »
» (II) . . .	46° 12' 00	6° 40 52	62° 29 4	10 » » »
Brissago (I) . . .	46° 07' 26	6° 22 18	62° 16 4	11 » » »
» . . .	» » »	» » »	62° 15 9	12 » » »
» . . .	» » »	» » »	62° 16 0	13 » » »
Brissago (II) . . .	46° 12' 00	6° 22 23	60° 58 4	14 » » »
» (III) . . .	46° 07' 32	6° 22 48	62° 11 9	15 » » »
Pino . . .	46° 06' 00	6° 24 28	62° 16 2	16 » » »
Lugano (I) . . .	46° 00' 34	6° 36 54	62° 18 7	17 » » »
Chiasso . . .	45° 50' 18	6° 41 56	62° 11 3	18 » » »

Misure eseguite nel 1889.

STAZIONI	Latitudine N	Longitudine E da Parigi	Inclinazione	Declinazione	Intensità orizzontale	Epoca
Chiasso . . .	45° 50' 18"	6° 41' 56"	62° 9,9	12° 30',6	0,21163	27 e 28 Luglio 1889
Lugano (I) . .	46 0 34	6 36 54	62 19,0	—	—	30 » »
» (II) . .	46 0 33	6 37 29	62 19,6	12 32,7	0,21096	30 e 31 » »
Brianza (I) . .	46 7 26	6 22 18	62 15,6	12 37,3	0,21112	1 e 2 Agosto » »
» (II) . .	46 12 0	6 22 23	61 1,0	—	—	4 » » »
» (III) . .	46 7 32	6 22 48	62 11,7	12 40,8	0,21136	3 » » »
Pino . .	46 6 0	6 24 28	62 16,0	12 36,7	0,21104	4 e 5 » » »
Bellinzona (I)	46 11 20	6 41 54	62 27,9	—	—	6 » » »
» (II)	46 12 0	6 40 52	62 27,1	12 27,8	0,21015	6 e 7 » » »
Bodio . .	46 22 37	6 35 4	62 35,4	12 29,4	0,20946	8 » » »
Airolo (I) . .	46 31 57	6 15 48	62 41,1	—	—	9 » » »
» (II) . .	46 31 38	6 15 33	62 40,8	12 39,7	0,20874	9 » » »
S. Gottardo . .	46 33 31	6 31 50	62 54,2	12 41,1	0,20839	10 e 11 » » »
Göschenen . .	46 40 2	6 14 43	62 56,0	12 43,6	0,20667	12 e 13 » » »
Flüelen . .	46 53 49	6 17 2	63 2,0	12 40,8	0,20612	14 e 15 » » »
Arth-Goldau (I)	47 2 37	6 13 5	63 11,2	12 42,6	0,20577	16 » » »
Rigi-Kulm . .	47 3 75	6 9 4	63 12,1	12 39,8	0,20564	17 e 18 » » »
Lucerna . .	47 2 48	5 58 50	63 10,6	12 48,1	0,20579	19, 20 e 21 » » »
Zurigo . .	47 21 15	6 13 32	63 23,2	12 37,6	0,20404	22 e 23 » » »
Brugg . .	47 29 3	5 22 47	63 32,8	12 45,3	0,20347	24 » » »
Olten . .	47 20 39	5 34 37	63 31,5	12 54,2	0,20362	25 e 27 » » »
Wartburg . .	47 20 2	5 35 0	63 30,3	12 58,6	0,20359	26 » » »
Basilea (I) . .	47 34 17	5 15 4	63 45,3	—	—	30 » » »
» (II) . .	47 32 17	5 15 42	63 44,8	13 6,2	0,20283	28, 29 e 31 » » »
Delemont . .	47 21 41	5 0 11	63 35,2	13 16,8	0,20328	1, 2 e 3 Settembre » »
Porrentrug . .	47 25 10	4 43 44	63 41,6	13 31,4	0,20302	4, e 5 » » »

## Misure eseguite nel 1890.

STAZIONI	Latitudine N	Longitudine E da Parigi	Inclinazione	Declinazione	Intensità orizzontale	Epoca
Aosta . . .	45° 44' 26"	5° 1' 2"	62° 10', 8	13° 11', 2	0.21130	29 e 30 Luglio 1890
St. Remis . .	45 50 7	4 52 53	62 24, 1	13 19, 5	0.21055	31 Luglio e 1° Agosto »
Gran S. Bernardo	45 52 3	4 49 47	62 30, 4	13 28, 1	0.20969	2 e 3 » »
Liddes . . .	45 59 29	4 51 15	62 31, 3	13 26, 3	0.20952	4 e 5 » » »
Martigny (II).	46 5 47	4 44 2	62 34, 2	13 28, 6	0.209195	6 e 7 » » »
Sion . . .	46 13 31	5 1 12	62 35, 3	13 18, 7	0.20910	8 e 9 » » »
Brieg (I)	46 19 8	5 39 11	62 36, 3	12 57, 4	0.20890	10 e 11 » » »
» (II)	46 19 0	5 39 28	62 45, 4	12 55, 8	0.20884	11 e 12 » » »
Ville neuve . .	46 23 34	4 35 11	62 47, 4	13 31, 2	0.20860	14 e 15 » » »
Losanna (I) . .	46 31 28	4 17 8	63 14, 9	13 36, 1	0.20558	16 e 17 » » »
Thonon . . .	46 23 12	4 8 40	62 49, 5	13 37, 8	0.20865	17 e 18 » » »
Ginevra (Plainpalaïs)	46 10 51	3 48 15	62 47, 1	13 42, 5	0.20887	19 e 20 » » »
» (osservatorio)	46 11 59	3 48 57	62 47, 4	13 41, 4	0.20888	21 e 22 » » »
Cluses . . .	46 3 0	4 14 56	62 36, 5	13 37, 9	0.20900	23 e 24 » » »
Friburgo . . .	46 48 10	4 49 0	63 12, 9	13 24, 5	0.205685	26 » » »
Bulle . . .	46 37 31	4 43 23	62 59, 8	13 27, 4	0.20630	27 e 28 » » »
Pilato . . .	46 58 47	5 55 15	63 6, 0	12 53, 6	0.20550	29 e 30 » » »
Berna . . .	46 58 0	5 6 58	63 14, 5	13 12, 8	0.205395	31 Agosto e 2 Settembre
Interlaken (I)	46 40 13	5 31 17	62 59, 6	—	—	3 Settembre 1890
» (II)	46 41 22	5 33 0	63 1, 3	13 2, 8	0.206265	3 e 4 » » »
Langnau . . .	46 56 28	5 26 33	63 9, 9	13 3, 9	0.20559	5 e 6 » » »
Biel (II).	47 8 3	4 54 7	63 25, 2	13 8, 6	0.20424	7, 8 e 9 » » »
Neuchâtel (I)	46 59 24	4 35 46	63 14, 8	—	—	10 » » »
» (II)	47 0 15	4 35 38	63 15, 4	13 27, 8	0.20510	11 e 12 » » »
Estevayer . .	46 51 11	4 30 20	63 11, 0	13 29, 4	0.20564	14 e 15 » » »
Iverdon . . .	46 47 24	4 18 13	63 11, 7	13 38, 1	0.20567	16 e 18 » » »



# Misure eseguite nel 1891.

S T A Z I O N I	Latitudine N	Longitudine E da Parigi	Inclinazione	Declinazione	Intensità orizzontale	Epoca
Winterthur .	47° 30' 18"	6° 23' 39"	63° 27',1	12° 23',2	0,20409	9 e 10 Agosto 1891
Wijl .	47 27 25	6 42 10	63 21,4	12 14,8	0,20419	10 e 12 »
Sciaffusa. .	47 42 11	6 17 31	63 37,2	12 25,1	0,20299	14 e 15 »
Costanza. .	47 39 57	6 50 33	63 30,1	12 11,6	0,20350	16 »
Romanshorn .	47 34 17	7 2 50	63 27,4	12 4,2	0,20381	17 e 18 »
Santa Margherita	47 27 17	7 17 45	63 20,0	11 58,6	0,204695	19 e 20 »
Buchs .	47 10 11	7 7 23	63 8,3	12 1,8	0,20589	21 e 22 »
Coira .	46 51 7	7 11 10	62 56,1	12 1,0	0,20678	24 »
Wesen .	47 8 22	6 46 46	63 9,8	12 12,8	0,20542	25 e 26 »
Rapperschwyi	47 13 22	6 28,53	63 12,5	12 20,9	0,20520	26,27 e 28 »

# Misure eseguite nel 1892.

Linthal .	46° 55' 14"	6° 39' 45"	62° 55',9	12° 11',2	0,20666	29 e 30 Luglio 1892
Andeer .	46 36 06	7 05 21	62 42,7	11 58,8	f 0,20850	31 Luglio e 1 Agosto »
Klosters. .	46 52 13	7 32 01	62 55,7	11 45,1	0,20659	3 e 4 »
Zernetz .	46 51 54	7 45 31	62 48,3	11 38,4	0,20752	7 e 8 »

## RIVISTA

SUNTI di A. BARTORELLI.

## Comptes Rendus, 1892.

(Primo Semestre).

15. — A. POTIER. *Sull' assorbimento della tormalina.* — In una precedente Nota (*Comptes Rendus*, 12 Marzo 1892) il Carvalho ha esposto una sua ricerca sull' assorbimento cristallino concludendo che si debbono rigettare tutte le teorie proposte fin qui per spiegare la propagazione della luce nei cristalli.

L' A. osserva che questa conclusione sarebbe una conseguenza necessaria del fatto seguente che il Carvalho crede di avere stabilito: l' assorbimento della luce prodotto da una lamina cristallina di spessore  $e + e'$  sarebbe più debole dell' assorbimento prodotto da due lamine sovrapposte di spessore  $e$  ed  $e'$ ; ma aggiunge che esso non ha verificato direttamente questa legge.

In questa nota sono esposti i risultati della verificaione fatti dall' A. fissando sopra una lamina di vetro: prima una lamina tagliata da un cristallo di tormalina, sotto l'angolo di  $40^\circ$  con l'asse e dello spessore di  $1670 \mu$ ; poi un sistema di due altre lamine, dello spessore rispettivo di  $842 \mu$  e  $829 \mu$ , prese nello stesso cristallo da una parte e dall' altra della prima. Queste due lamine furono riunite con un po' di trementina, e sovrapposte alla prima con la stessa orientazione.

L' A. ha trovato che, in conformità delle idee generalmente adottate, la trasparenza delle due lamine è uguale a quella della lamina unica per tutte le incidenze. Per conseguenza, secondo l' A., l' intensità della luce trasmessa da un mezzo cristallino di spessore  $s$  è con ragione rappresentata dalla formula  $e^{-hs}$ , dove  $h$  è una funzione della direzione della vibrazione.

LE VERRIER. *Sul calore specifico dei metalli.* — L' A. espone in questa Nota i risultati di ricerche fatte sul calore specifico di alcuni metalli (rame, argento, alluminio, zinco e piombo). Esso misurava, per mezzo del pirometro del Le Chatelier, la temperatura del metallo nell'istante della sua immersione nel calorimetro, ed è giunto con questo metodo a costatare in tutti i metalli studiati dei punti singolari analoghi a quelli segnalati dal Pionchon per il ferro, per il nickel e per il cobalto.

Secondo l' A. il calore specifico  $\left(\frac{\Delta c}{\Delta t}\right)$  resta sensibilmente costante per intervalli di temperatura che non eccedono in generale i 200° o i 300°, poi cambia bruscamente. La variazione del calore totale è dunque rappresentata da una linea spezzata e non da una curva continua. Le differenti porzioni rette di questa linea possono raccordarsi con degli elementi di curva variabili; in vicinanza dei punti singolari lo stato del corpo non è funzione della temperatura soltanto, esso cambia anche col modo come una data temperatura è raggiunta. Il lavoro molecolare che corrisponde al cambiamento di stato subisce in generale un ritardo, e non si trovano le stesse quantità di calore durante il riscaldamento o il raffreddamento. Se si parte da una temperatura inferiore per ritornarvi, dopo avere oltrepassato quella che corrisponde al punto singolare, si ottiene un ciclo chiuso e non una curva unica.

Paragonando i propri risultati con quelli trovati del Le Chatelier per le variazioni della resistenza con la temperatura, l' A. osserva che la seconda fase per il calore specifico (che comincia a temperature fra i 200° e i 300°) coincide sempre col periodo in cui i metalli sono più malleabili, nel senso che il rapporto fra l'allungamento e la carica di rottura è massimo.

In una estesa tabella son consegnati i risultati numerici pei differenti metalli.

16. — A. CROVA. *Sulla misura ottica delle alte temperature.*

— Al seguito della recente discussione sollevata dalle ricerche del Le Chatelier, ed alla quale hanno preso parte il Becquerel e il Violle, l' A. ricorda il metodo ottico proposto da lui nel 1878 per misurare la temperatura dei corpi incandescenti. Il principio di tale metodo consiste nel prendere il rapporto di due determinazioni fotometriche di luci semplici emesse dal corpo incandescente e da una lampada Carcel, in due regioni dei loro spettri definite dalle lunghezze d'onda. Esso ha il vantaggio di essere indipendente dalle intensità assolute, e, per conseguenza, di sopprimere la necessità dell'aggiustamento della lampada; inoltre, fra limiti estesi, è indipendente dal potere emissivo del corpo incandescente. E poichè, secondo il Le Chatelier <sup>1)</sup>, questo metodo, per il suo difetto di sensibilità, non è in pratica tanto soddisfacente come in teoria, l' A. espone in questa Nota alcuni fatti per mostrare la esattezza e la sensibilità del metodo.

17. — G. LIPPMANN. *Sulla fotografia dei colori.* — L' A. ri-

1) *Comptes rendus*, t. CXIV, p. 214 (1892).

corda che nella prima Nota <sup>1)</sup> presentata su questo argomento esso osservava come gli strati sensibili allora impiegati mancavano di sensibilità e di isocromatismo. Da allora in poi esso è riuscito a migliorarli molto tantochè, sebbene riconosca che resta sempre assai da fare, pur nonostante può con questa Nota presentare delle fotografie molto brillanti dello spettro, ottenute sopra strati d'albumino-bromuro d'argento resi ortocromatici con l'azalina e la cianina.

Tutti i colori si ottengono, il rosso compreso, senza interposizione di schermi colorati, e dopo una posa dai cinque ai trenta secondi. L' A. presenta pure delle fotografie di oggetti diversi dove sono riprodotti i colori naturali; alcune di queste hanno richiesto dai cinque ai dieci minuti di posa al sole o alla luce elettrica, altre sono ottenute con parecchie ore di posa alla luce diffusa. Per questo riguardo dunque l' A. osserva che occorre aumentare notevolmente la sensibilità dello strato. Siccome poi in altre fotografie il bleu del cielo era divenuto indaco, esso aggiunge che anche l'ortocromatismo ha bisogno di essere ulteriormente perfezionato.

C. MALTEZOS. *Misura diretta e indiretta dell' angolo di raccordamento di un liquido che non bagna il vetro.* — L' A. ricorda che le equazioni più comode per determinare l'angolo di raccordamento dei liquidi con i solidi non bagnati da essi sono quelle usate da Desains (*Annales de Chimie et de Physique*, 3<sup>a</sup> serie, tomo LI) cioè le :

$$(1) \quad H^2 = 2a^2 (1 - \sin i)$$

$$(2) \quad q = 2a \cos \frac{i}{2} + \frac{2a^2}{3l} \frac{1 - \sin^2 \frac{i}{2}}{\cos \frac{i}{2}} - \frac{2a^2}{b} ;$$

e che, se si suppone per esempio che il liquido sia il mercurio e il solido il vetro, nelle equazioni (1) e (2)  $H$  indica la depressione del mercurio in un vaso largo attorno ad una lamina di vetro piana e verticale,  $a^2$  è la costante capillare incognita,  $i$  l'angolo cercato di raccordamento,  $q$  lo spessore massimo di una larga goccia di mercurio posata sopra una lamina di vetro orizzontale,  $l$  il raggio della base della goccia, infine  $b$  il raggio di curvatura al vertice della goccia. Trascurando poi il termine pic-

1) *Comptes rendus*, t. CXII, p. 274 (1891).

colossimo  $-\frac{2i^3}{b}$ , a causa della larghezza della goccia, si ha l'altra equazione:

$$(3) \quad q = 2a \cos \frac{i}{2} + \frac{2a^3}{3l} \frac{1 - \operatorname{sen}^3 \frac{i}{2}}{\cos \frac{i}{2}}.$$

L' A. invece, per altra via, ha ottenuto fra  $a^3$  ed  $i$  l'equazione

$$(4) \quad \cos i + \frac{\operatorname{sen} i}{2l} (q - z') = \frac{q - z'}{2a^3} \left( q + z' - \frac{a^3}{L} \right) + \frac{2(q - z')}{b}$$

dove il significato di  $i$ ,  $a^3$ ,  $q$  è lo stesso che precedentemente, e dove  $L$  è il raggio massimo della goccia, e  $z'$  la distanza fra il piano tangente al vertice della goccia e il piano che contiene la più grande circonferenza (cioè quella di raggio  $L$ ). Questa equazione, nel caso di una larga goccia, si riduce evidentemente all'altra:

$$(5) \quad \cos i + \frac{\operatorname{sen} i}{2l} (q - z') = \frac{q - z'}{2a^3} \left( q + z' - \frac{a^3}{L} \right);$$

ed esso, misurando direttamente l'angolo  $i$ , e paragonando i risultati dell'esperienza coi valori che si deducono dalle equazioni (1) e (3), usate fin qui, o dalle (1) e (5) da esso proposte mostra come quest' ultime corrispondano molto meglio alle osservazioni.

H. BAGARD. *Sui fenomeni termoelettrici al contatto di due elettroliti.* — In questa Nota l' A. esamina la variazione della forza elettromotrice con la temperatura in coppie termoelettriche costituite da due elettroliti, e trova che i fenomeni termo-elettrici al contatto di due elettroliti presentano un andamento analogo a quello che è stato osservato per la maggior parte delle coppie bi-metalliche.

18. — A. CHASSY. *Sulle leggi dell'elettrolisi.* — Quando si sottopone all'elettrolisi una sostanza di formola complessa  $M^p R^q$ , dove  $M$  indica un radicale elettropositivo ed  $R$  un radicale elettronegativo, si sa, secondo E. Becquerel, che si sviluppa l'equivalente del radicale  $R$  e  $p:q$  equivalenti del radicale  $M$ , nel tempo che nello stesso circuito si sviluppa 1 equivalente d'idrogeno di un voltmetro ad acqua. Peraltro, secondo G. Wiedemann e molti altri fisici, questa legge presenta un certo numero di eccezioni; perchè per molti sali, nelle stesse condizioni, si

sviluppano  $q:p$  equivalenti del radicale R ed 1 equivalente dell'altro radicale.

L' A. propone di sostituire ai vari enunciati la seguente legge unica, che, come esso mostra, è soddisfacente per tutti i casi.

« Quando si sottopone all'elettrolisi una sostanza qualunque si sviluppa sempre 1 equivalente d'idrogeno o la quantità corrispondente del radicale elettropositivo ».

In questo enunciato esso introduce la denominazione di quantità corrispondenti di idrogeno e di un radicale, che definisce nel modo che segue: Se nella formola  $M^p R^q$  si sostituisce ad  $M^p$  una certa quantità di idrogeno  $H^x$  in modo da ottenere un composto idrogenato conosciuto e ben definito (operazione che si può sempre fare, osserva l' A., senza ambiguità), si potranno chiamare corrispondenti le quantità  $M^p$  ed  $H^x$ . Così in  $Fe^2 Cl^3$  si può sostituire  $Fe^2$  con  $H^3$  e perciò  $2/3 Fe$  è in questo caso la quantità corrispondente ad H; in  $Fe Cl$  si può rimpiazzare  $Fe$  con  $H$ , e quindi in questo sale  $Fe$  è la quantità corrispondente ad H.

L' A. osserva anche che la determinazione delle quantità corrispondenti non richiede necessariamente la conoscenza della formola che corrisponde alla molecola elettrolitica; così la formola del cloruro ferrico essendo  $Fe^2 Cl^3$  o  $Fe^3 Cl^6$  la quantità di ferro corrispondente in questo sale ad un equivalente d'idrogeno è sempre la stessa. Tale determinazione è dunque indipendente dalle differenti teorie che si hanno per stabilire quelle formole.

19. — H. POINCARÉ. *Sulla propagazione delle oscillazioni hertziane.* — L' A. osserva che la teoria data da Hertz per la propagazione delle oscillazioni elettriche lungo un filo non sembra più sufficiente dopochè è noto con quanta rapidità si smorzano le oscillazioni stesse. Esso pertanto crede che si possa sostituire con una teoria più approssimata, applicando il metodo già da lui esposto in una comunicazione recente. E nella presente Nota stabilisce le equazioni per la propagazione lungo un filo sottilissimo, limitato da una parte e indefinito dall'altra, di una perturbazione qualunque prodotta al suo estremo supponendo nullo lo smorzamento della propagazione stessa. I risultati finali non sono in contraddizione con questa ipotesi, la quale peraltro è in contraddizione col fatto; perciò l' A. crede che bisognerebbe mettere in calcolo qualche altro elemento; probabilmente il diametro del filo.

C. LIMB. *Sulla determinazione del momento della coppia di torsione di una sospensione unifilare.* — L' A. osserva che il processo più semplice per effettuare questa determinazione consiste nel sospendere al filo una massa di momento d'inerzia cono-

sciuto  $I$  e nel misurare la durata  $t$  dell'oscillazione. Il coefficiente  $c$  di torsione del filo è dato dalla formula

$$(1) \quad c = \frac{4 \pi^2 I}{t^2}.$$

Sospendendo un solido di rivoluzione secondo il suo asse l'effetto dell'aria è assolutamente trascurabile; la forma cilindrica è indicata, essendo la più facile ad ottenersi con rigore per mezzo del tornio.

L'A. ha misurato il coefficiente  $c$  per un filo di ottone lungo 182,13 e del diametro di 0,00435 ed ha trovato come valor medio  $c = 746,4$ .

Il coefficiente  $k$  di Coulomb, definito dall'equazione

$$k = \frac{cl}{d^2}$$

per il filo in discorso è dunque in unità C. G. S.

$$3,797 \cdot 10^{10} . —$$

**20. — E. H. AMAGAT.** *Sulla determinazione della densità dei gas liquefatti e dei loro vapori saturi. - Elementi del punto critico dell'acido carbonico.* — Uno dei metodi impiegati per determinare la densità dei vapori dei gas liquefatti consiste nel valutare nell'asta graduata del tubo a pressione il volume occupato dal fluido al momento in cui, in seguito ad una variazione lentissima della pressione, o si vedono apparire le prime tracce di liquido, o sparire le ultime tracce di quello che si era formato. L'A. fa osservare come nelle numerose osservazioni da lui fatte abbia riscontrato essere estremamente difficile di cogliere il momento esatto dell'apparizione o della sparizione. Di più il punto della liquefazione totale può essere di molto ritardato dalla presenza di una traccia d'aria insignificante. È per questo che l'A. ritiene necessario di operare sopra corpi che siano allo stato di equilibrio normale, come avviene, dopo un tempo sufficiente quando il liquido e il vapore sono ambidue in quantità sufficienti. Ecco il metodo da esso seguito: liquefare dapprincipio una parte del gas in modo che il volume del liquido sia, per esempio, il decimo di quello del vapore e, quando l'equilibrio è perfettamente stabilito, fare la lettura dei due volumi; spingere poi la liquefazione tanto da triplicare o quadruplicare la quantità di liquido, e misurare i nuovi volumi. Se  $\Delta V$  e  $\Delta V'$  sono l'aumento di volume del liquido e la diminuzione di volume del vapore quando

si passa dal primo equilibrio al secondo,  $D$  e  $D'$  le densità sotto i due stati, si ha evidentemente:

$$\frac{\Delta V}{\Delta V'} = \frac{D'}{D}.$$

D'altra parte, se  $V$  e  $V'$  sono i volumi del liquido e del vapore durante uno dei due equilibrii, si avrà anche:

$$VD + V'D' = P$$

dove  $P$  è il peso del gas sul quale si opera. Da queste due equazioni si deducono  $D$  e  $D'$ .

L' A. ha applicato il metodo all'acido carbonico ed ha riportato i risultati ottenuti in una estesa tabella, rappresentandoli poi anche con varie curve. Si è spinto nelle misure assai vicino al punto critico, di cui fissa gli elementi nei valori che seguono:

$$T = 31^{\circ},35; \quad H = 72^{\text{atm}},9; \quad D = 0,464.$$

L' A. descrive poi certe apparenze speciali segnalate durante le osservazioni ed abbastanza interessanti, ma che ci porterebbero in lungo se volessimo anche solo accennarle.

21, 22. — H. POINCARÉ. *Sulla propagazione delle oscillazioni elettriche*. — L' A. ricorda di avere studiato in una Nota recente la teoria della propagazione delle oscillazioni elettriche lungo un filo indefinito, allo scopo precipuo di vedere se la teoria rendeva ben conto dello smorzamento osservato dal Blondlot. In quella Nota l' A. aveva proceduto per via indiretta col supporre lo smorzamento nullo, guidato dalla considerazione che la soluzione del problema deve essere unica e che, se lo smorzamento esiste, le conclusioni a cui si perverrà con tale ipotesi dovranno essere in contradizione con le condizioni del problema, e in particolare con quella che le linee di forza devono incontrare normalmente i conduttori. Peraltro, supponendo il filo infinitamente sottile tale contradizione non esisteva, onde l' A. concluse che bisognava tener conto del diametro del filo; ed è quello appunto che egli fa nella presente Nota. Non possiamo qui brevemente riassumere la parte analitica di questa memoria; ci limiteremo perciò a dire che, introdotta la considerazione del diametro del filo e fondandosi sul principio della conservazione dell'energia, spiega agevolmente come per un valore finito del diametro stesso si debba avere lo smorzamento, e come questo divenga nullo al limite per un valore del diametro infinitamente piccolo.

L' A. conclude dicendo che sarebbe interessante, sebbene



certo difficile, verificare sperimentalmente la dipendenza dello smorzamento dal diametro del filo.

R. PICTET. *Studio dei fenomeni fisici e chimici sotto l'influenza delle temperature molto basse.* — L' A. ottiene tre cadute di temperatura con l'impiego metodico di tre liquidi volatili scelti opportunamente e dei quali i vapori sono aspirati e compressi per mezzo di compressori di costruzione speciale.

Una mescolanza di  $\text{SO}^2$  e di  $\text{CO}^2$  permette di raggiungere i  $-110^\circ$  nel primo ciclo, azionato da tre compressori uniti in *compound*.

Il protossido d'azoto o, a scelta, l'etilene si liquefa in un serpentino, immerso nel refrigerante del primo ciclo, poi, una volta liquefatto, si espande in un secondo ciclo in cui l'abbassamento di temperatura arriva a  $-150^\circ$  circa.

In ultimo, l'aria atmosferica, compressa a  $200^{\text{atm}}$  in grandi serbatoi in acciaio del volume di  $7^{\text{cm}}$ , liquefa facilmente a  $-150^\circ$  e permette di raggiungere come temperatura limite inferiore dai  $-210^\circ$  ai  $-213^\circ$ .

Raggiungendo temperature così basse l' A. ha potuto constatare che le vibrazioni calorifiche dell'etere corrispondenti alle basse temperature traversano tutti i corpi quasi senza resistenza; e fa notare che la luce rossa, che corrisponde a queste radiazioni calorifiche, traversa gli strati atmosferici più facilmente delle altre luci, per le quali le onde dell'etere sono più corte. Ciò stabilisce un rapporto nuovo tra calore e luce.

Di più l' A. afferma che le esperienze da lui fatte provano come l'irraggiamento a traverso ai corpi a bassa temperatura disturbi le letture dei termometri in modo tale che essi non possono più considerarsi che come *termoscopi*, o meglio come *termo-dinamometri* che danno il valore dinamico del movimento calorifico nel mezzo in cui sono immersi.

23. — E. H. AMAGAT. *Sulla densità dei gas liquefatti e dei loro vapori saturi, e sulle costanti del punto critico dell'acido carbonico.* — In questa Nota l' A. espone varie importanti considerazioni sui risultati ottenuti in una precedente Nota sullo stesso argomento <sup>1)</sup>.

A. BERGET. *Metodo ottico per determinare la conducibilità termica delle sbarre metalliche.* — L' A. considera una sbarra metallica, la cui lunghezza sia molto grande in confronto del diametro, alla temperatura iniziale di zero gradi.

Se si scalda una delle estremità della sbarra ad una tempe-

1) *Comptes rendus*, t. CXIV (1892) pag. 1093.

ratura costante  $T$ , un elemento di lunghezza  $dx$ , situato alla distanza  $x$  dall'estremo scaldato, sarà portato ad una temperatura  $t$ , per la conducibilità della sbarra. Chiamando  $\lambda$  il coefficiente di dilatazione lineare della sostanza di cui è formata la sbarra, l'elemento  $dx$  avrà subito l'allungamento  $\Delta(dx) = dx \lambda t$ . Ma per la teoria della conducibilità in una sbarra molto lunga si ha  $t = Te^{-ax}$ , con  $a^2 = \frac{hp}{ks}$ , dove  $h$  è il coefficiente di conducibilità esterna e  $k$  il coefficiente di conducibilità interna della sbarra,  $p$  ed  $s$  sono il suo perimetro e la sua sezione; e perciò  $\Sigma \Delta(dx)$  ossia l'allungamento totale  $\Delta l$  della sbarra sarà espresso da

$$\Delta l = \lambda T \int e^{-ax} dx = \frac{\lambda T}{a} (1 - e^{-az})$$

che per  $x = \infty$  si riduce a

$$(1) \quad \Delta l = \frac{\lambda T}{a}.$$

Se ora si ha una seconda sbarra, fatta con una sostanza che abbia il coefficiente di dilatazione lineare  $\lambda_1$  e il coefficiente di conducibilità interna  $k_1$ , la prendiamo della stessa sezione, e per mezzo della nichelatura o della doratura ne rendiamo il potere emissivo eguale a quello dell'altra, e se la scaldiamo ad un estremo nelle identiche condizioni, avremo

$$(2) \quad \Delta_1 l = \frac{\lambda_1 T}{a_1}.$$

Dividendo membro a membro le (1) e (2) si deduce

$$\frac{\Delta l}{\Delta_1 l} = \frac{\lambda a_1}{\lambda_1 a} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\frac{k}{k_1}};$$

dunque, se  $\lambda$  e  $\lambda_1$  sono noti, da questa relazione potremo calcolare il rapporto  $\frac{k}{k_1}$  dei coefficienti di conducibilità interna delle due sbarre, senza bisogno di determinarne i coefficienti di conducibilità esterna, purchè si conosca il rapporto  $\frac{\Delta l}{\Delta_1 l}$  dei loro allungamenti.

È per misurare questo rapporto che l'A. si propone di adottare un metodo ottico, sia servendosi delle due estremità delle sbarre, pulite specularmente e collocate opportunamente, come specchi di Fresnel; sia fissando all'estremità di una un piano e a quella dell'altra una lente per produrre gli anelli di Newton.

E. JANNETTAZ. *Sulla propagazione del calore nei corpi cristallizzati.* — Da più di venti anni l' A. ha iniziato delle ricerche sulla propagazione del calore nei corpi cristallizzati, seguendo il metodo del de Senarmont, da lui però sostanzialmente modificato come sarà detto in una Nota speciale.

Nelle ricerche precedenti l' A. era giunto a formulare la legge seguente: « *Gli assi di più facile propagazione termica sono paralleli ai clivaggi più facili* ».

In questa Nota l' A. mostra, con numerose tavole, come nel caso in cui un cristallo possiede più piani di clivaggio, si possa considerare che questi clivaggi sommino le loro azioni dando luogo a ciò che egli chiama *una risultante dei clivaggi*, e la legge si possa allora enunciare così: « *L'asse di più facile propagazione termica è parallelo alla risultante dei clivaggi* ».

H. ABRAHAM. *Sopra una nuova determinazione del rapporto  $v$  fra le unità C. G. S. elettromagnetiche ed elettrostatiche.* — L' A. ha misurato una stessa capacità nei due sistemi di unità, impiegando il condensatore piano ad anello di guardia già descritto in una precedente Nota <sup>1)</sup>. Tutte le misure sono state concordanti fino al millesimo dando per il rapporto il valore  $v = 299,2 \cdot 10^9$ .

24. — A. VASCHY. *Sulle considerazioni di omogeneità in Fisica.* — L' A. ricorda che, con semplici considerazioni d' omogeneità, si può calcolare, a meno di un coefficiente numerico, la durata delle oscillazioni di un pendolo, e diverse altre formole di Meccanica e di Fisica. Questo genere di calcolo riposa sul principio seguente, di facile dimostrazione <sup>2)</sup>. « Se fra  $n$  parametri  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , dei quali i primi  $p$  sono riferiti a delle unità fondamentali distinte (lunghezza, massa, tempo ecc.) e i rimanenti  $n - p$  a delle unità derivate dalle precedenti (forza, velocità ecc.), esiste una relazione  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$  indipendente dalle grandezze che si possono attribuire alle unità fondamentali, allora questi  $n$  parametri soddisfano pure ad una relazione  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-p}) = 0$  contenente soltanto  $n - p$  parametri  $x_1, x_2, \dots, x_{n-p}$  che sono funzioni monomie di  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $x_k = a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \dots a_n^{\lambda}$ ) ». Questo teorema fondamentale serve all' A. di punto di partenza per mostrare come si possano assai facilmente stabilire varie formole fisiche.

E. BOUTY. *Sulla coesistenza del potere dielettrico e della conducibilità elettrolitica.* — L' A. osserva che il metodo da lui applicato alla misura delle costanti dielettriche <sup>3)</sup> dà nello stesso

1) *Comptes rendus*, t. CXIV (1892) pag. 654.

2) Vedi, *Annales d'Épigraphiques*, p. 25, Gennaio-Febbraio 1792.

3) *Comptes rendus*, t. CXIV (1892), pag. 533.

tempo il valore della resistenza specifica  $\rho$  della materia dielettrica e conduttrice studiata, facendo una sola misura assoluta, cioè quella della durata d'oscillazione del pendolo interruttore. L' A. ha applicato il detto metodo a dei buoni isolatori, come la benzina, l'essenza di trementina e il solfuro di carbonio, mescolati a qualche centesimo d'alcool assoluto o d'etere. Per le mescolanze di benzina e d'alcool ha trovato questa notevole particolarità; le prime tracce di alcool elevano a pena la conducibilità, che dopo cresce rapidamente, mantenendosi però sempre inferiore a quella che si calcolerebbe con la regola delle mescolanze. Esso ne conclude che la conducibilità dell'alcool deve appartenere in maggior parte a sostanze estranee, probabilmente insolubili nella benzina pura; e che, in queste esperienze sui liquidi la conducibilità ed il potere dielettrico sovrapposti non appartengono realmente alle stesse molecole.

Altrettanto non può dirsi per le esperienze eseguite sopra gli azotati alcalini presi allo stato solido. Qui l' A. presa ogni precauzione perchè la conducibilità non si potesse attribuire ad impurità o ad uno stato igrometrico superficiale ha trovato per la costante dielettrica un valore quasi costante fra limiti di temperatura per i quali la resistenza specifica in ohms da  $3,6 \cdot 10^{11}$  è passata a  $2,6 \cdot 10^9$ , ossia ha variato press' a poco nel rapporto di 138 ad 1. La conducibilità ed il potere dielettrico devono dunque in questo caso appartenere a molecole della stessa specie.

La distinzione fra i dielettrici e gli elettroliti consisterebbe dunque nell'ordine di grandezza della loro conducibilità. La polarizzazione dielettrica, stabilita in un tempo cortissimo rispetto al decimillesimo di secondo, corrisponderebbe, nello schema di Grotthus, all'orientazione iniziale delle molecole composte; la conducibilità alla loro rottura progressiva.

25. — MOESSARD. *Sul metodo di Doppler-Fizeau*. — Il metodo Doppler-Fizeau riposa sul principio che, quando un corpo sonoro ed un osservatore sono in movimento, l'altezza del suono percepito dall'osservatore dipende dal movimento di questi due punti. L' A. dimostra che non basta considerare questo movimento relativo, ma bisogna tener conto anche del moto relativo dei due punti relativamente all'aria ambiente.

Esso mostra di più come le stesse considerazioni si possano estendere al movimento dei corpi luminosi.

A. VASCHY. *Esame della possibilità di una azione reciproca fra un corpo elettrizzato ed una calamita*. — Le leggi fondamentali delle azioni elettriche e magnetiche si riassumono nelle quattro formole seguenti:

$$f = k \frac{qq'}{r^2} \text{ (COULOMB, Elettrostatica) },$$

$$f = k' \frac{\mu\mu'}{r^2} \text{ (COULOMB, Magnetismo) },$$

$$f = \frac{\mu i ds \sin \alpha}{r^2} \text{ (LAPLACE, Elettromagnetismo) },$$

$$f = \frac{1}{k'} \frac{i i' ds ds'}{r^3} (2 \cos \varepsilon - 3 \cos \theta \cos \theta') \text{ (AMPÈRE, Elettrodinamica) }$$

La natura del mezzo che trasmette queste azioni interviene nelle formule d'Elettrostatica e di Magnetismo per mezzo dei coefficienti  $k$  e  $k'$ ; ma le leggi dell'Elettromagnetismo e dell'Elettrodinamica non introducono alcun coefficiente nuovo. Ci si può proporre la questione se esistano altre azioni elettriche o magnetiche, sconosciute fin qui, che non facciano intervenire nessun nuovo coefficiente diverso da  $k$  e da  $k'$ , cioè nessuna nuova qualità fisica del mezzo. E l'A. si domanda: un corpo elettrizzato esercita un'azione sopra una calamita? Con delle considerazioni d'omogeneità, di cui il principio è già stato dall'A. esposto in una precedente Nota <sup>1)</sup>, esso mostra che o una tale azione non esiste, oppure essa dipende da un nuovo parametro che servirà a definire una nuova qualità fisica del mezzo.

26. — P. GALOPIN. *Sulle variazioni di temperatura dell'acqua compressa rapidamente a 500 atm. fra 0° e 10°*. — Servendosi dei due principi fondamentali della Termodinamica per determinare teoricamente le variazioni di temperatura che devono subire i liquidi compressi bruscamente (compressione adiabatica) William Thomson è pervenuto alla nota formula

$$\theta^0 = \frac{\alpha Pt}{E cd},$$

nella quale  $\theta$  indica la variazione di temperatura in gradi,  $\alpha$  il coefficiente di dilatazione,  $t$  la temperatura assoluta,  $E$  l'equivalente meccanico del calore,  $c$  e  $d$  il calore specifico e la densità del liquido compresso.

L'A. richiamando i calcoli del Cornu <sup>2)</sup> mostra come nello stato attuale delle nostre cognizioni sull'acqua non si può calcolare il valore di  $\theta$  per grandi variazioni della pressione  $P$ ; e perciò si propone di determinare sperimentalmente il valore di  $\theta$  per

1) *Comptes rendus*, t. CXIV, (1892), p. 1416.

2) *Journal de Physique*, t. II (1873) p. 41.

tutti i liquidi fra  $-200^{\circ}$  e  $+200^{\circ}$ , per variazioni brusche di pressione di 1000 atm.

In questa Nota intanto espone i risultati delle esperienze fatte sull'acqua fra le temperature di  $0^{\circ}$  e  $10^{\circ}$  con una pressione di 500 atm. In cinquanta serie di osservazioni esso ha ottenuto i numeri seguenti:

Temper. 0,4 a 0,7; 1; 2; 2,5; 3; 3,9; 4; 5; 8; 10  
Valori di  $\theta$  0,20; 0,26; 0,27; 0,29; 0,33; 0,36; 0,36; 0,43; 0,52; 0,59  
per 500 atm.

Da questi risultati l' A. trae alcune conclusioni importanti. Prima di tutto siccome fino da  $0^{\circ}$  un aumento di pressione produce un aumento di temperatura, ne segue che comprimendo l'acqua *al disotto di  $4^{\circ}$* , l'elevazione di pressione fa abbassare la temperatura alla quale, *per la nuova pressione*, si trova il massimo di densità dell'acqua. Tale abbassamento è sufficiente perchè risulti  $\theta$  positivo invece che negativo, ed il fatto è sembrato all' A. che dimostri non potersi qui adoperare la formola di Thomson senza le necessarie correzioni.

In secondo luogo poi i risultati precedenti mostrano che il punto di congelazione dell'acqua corrisponde presso a poco con la temperatura del suo massimo di densità sotto pressioni elevate.

A. PEROT. *Misura della costante dielettrica per mezzo delle oscillazioni elettromagnetiche.* — Nelle sue ricerche sulla velocità di propagazione delle deformazioni elettriche Blondlot <sup>1)</sup> ha mostrato che il periodo dei risonatori da lui impiegati era proporzionale alla radice quadrata della loro capacità. Se dunque si determina sperimentalmente la lunghezza d'onda  $\lambda$  di un dato risonatore, con l'aria per dielettrico; poi la sua lunghezza d'onda  $\lambda_1$ , con un dielettrico di costante  $K$ , si avrà  $\frac{\lambda_1}{\lambda} = \sqrt{K}$ . Questo è il principio del metodo applicato dall' A. per misurare la costante dielettrica dell'essenza di trementina, del ghiaccio, della resina e del vetro, servendosi di un oscillatore e di un risonatore simili a quelli di Blondlot. In questa Nota esso riporta solo i risultati ottenuti per l'essenza di trementina e per il ghiaccio.

Per l'essenza di trementina ha trovato  $K = 2,25$ ; mentre la determinazione fatta coll'elettrometro differenziale dell' A. <sup>2)</sup> aveva dato  $K = 2,31$ . Questi due numeri, avuto riguardo alla mancanza di precisione nella determinazione delle grandezze  $\lambda$  e  $\lambda_1$ , possono riguardarsi secondo l' A. come identici.

1) *Comptes rendus*, t. CXIII (1891) pag. 628.

2) *Journal de Physique*, sec. serie. t. X, pag. 149.

Per il ghiaccio ha trovato i numeri seguenti :

$\lambda_1 =$	1360	940	680	cm.
$K =$	71	67	60	

questi numeri sono vicini al valore trovato da Bouty, che è 78, e indicherebbero che  $K$  diminuisce con  $\lambda$ , ma l'A. non crede di potere ancora affermarlo perchè le esperienze per i piccoli valori di  $\lambda$  risultavano poco precise.

E. BRANLY. *Sulla conducibilità di un gas compreso fra un metallo freddo e un corpo incandescente.* — Nelle esperienze relative ai fenomeni di conducibilità della sua Nota del 4 aprile 1892 (*Comptes rendus*) l'A. ricorda che la carica del metallo freddo era indicata dall'elettroscopio al quale il metallo era unito, mentre che il platino incandescente comunicava col suolo. Con una nuova disposizione sperimentale l'A. ha potuto rendere visibile per i due metalli insieme il meccanismo del passaggio di elettricità. Il metallo freddo e il platino incandescente sono uniti ciascuno con un elettroscopio ben isolato. Il metallo freddo è un tubo di ottone, e la spirale di platino vi è sospesa nel mezzo ed è scaldata da un becco Bunsen. L'A. ha eseguito tre serie di esperienze :

1° Ha portato la spirale al rosso scuro senza fiamma (il becco a gas viene acceso, poi spento quando la spirale è al rosso; e si ristabilisce la corrente del gas prima che essa si raffreddi). In questo caso il gas compreso fra il tubo e la spirale è conduttore per l'elettricità negativa che va dal tubo freddo alla spirale incandescente, e per l'elettricità positiva che va dalla spirale al tubo. Non c'è la conducibilità inversa.

2° Ha portato la spirale ad un rosso più vivo senza fiamma. In questo caso una conducibilità inversa si aggiunge alla prima, però più debole di essa. Aumenta quando si aumenta il grado di rosso della spirale.

3° Ha portato la spirale al rosso vivo nella fiamma. In questo caso la conducibilità è indifferente per le due elettricità.

L'A. ha moltiplicato poi le esperienze per mostrare che il fenomeno accade anche con corpi incandescenti diversi dal platino, e di più che il senso della conducibilità varia con la natura del corpo incandescente. Infine, per quanto riguarda le variazioni nel senso della conducibilità, le esperienze elettrostatiche sono state confermate da esperienze galvanometriche.

**Philosophical Magazine. Vol. XXXI e XXXII, 1891.**

Vol. XXXI. — A. L. SELBY. *Sulla variazione della tensione superficiale colla temperatura.* — Secondo Mendelejeff un liquido ideale è caratterizzato dalle due condizioni

$$V_t = V_0(1 - kt), \quad T_t = T_0(1 - at),$$

essendo  $V_t$  e  $T_t$  il volume specifico e la tensione superficiale alla temperatura  $t$ .

L'A. dimostra che tutti quanti i liquidi soddisfano alla seconda delle anzidette condizioni.

F. J. SMITH. *Su alcuni nuovi metodi per determinare i punti di recalescenza nel ferro e nell'acciaio.* — L'A. ha cercato di scoprire se vi è connessione fra il momento in cui avviene il cambiamento di temperatura con quello in cui per la recalescenza si deve avere un cambiamento di forma. Per questo, il filo d'acciaio da studiare era fissato, verticalmente, alla sua estremità superiore, e inferiormente comandava una leggera leva d'alluminio, la cui punta registrava, su un cilindro rotante affumicato, i più piccoli cambiamenti di lunghezza del filo. Le variazioni di temperatura eran registrate per mezzo di una coppia termoelettrica, riunita a un galvanometro a specchio, il cui fascio luminoso cadeva su un altro cilindro rotante coperto di carta fotografica. L'esperienza mostrò che i cambiamenti di lunghezza e di temperatura del filo sono esattamente simultanei, tanto che la curva tracciata sulla carta affumicata può servire anche a indicare i cambiamenti di temperatura.

Un altro metodo per rendere evidenti i cambiamenti di lunghezza che si hanno nella recalescenza, consiste nel fissare una delle estremità del filo a un disco di mica posto in un cono tronco di legno, al modo delle membrane telefoniche, tendendo il filo opportunamente in posizione orizzontale.

Scaldando il filo con una fiamma Bunsen, si ode a un certo momento un suono, che cessa continuando a scaldare il filo; e lasciandolo poi raffreddare, si ha nuovamente un suono, alla stessa temperatura del primo. Oltre a ciò si ode un terzo suono, alla temperatura di circa 490° C, che sembra perciò in corrispondenza del secondo punto critico indicato da Osmond (C. R. 1890).

S. T. PRESTON. *Alcune osservazioni sulla teoria cinetica dei gas.* — L'A. fa osservare che, parlandosi, nella teoria cinetica dei gas, di velocità molecolari varianti da zero a infinito, potrebbe



sembrare che talvolta le velocità stesse siano enormemente grandi; mentre egli dice che, crescendo i moti vibratorii delle molecole con la loro velocità di traslazione, ne risulta che una parte dell'energia deve essere spesa nel vincere la resistenza dell'etere, e che quindi le velocità molecolari non saranno mai infinitamente grandi.

Detto. *La scarica luminosa.* — L' A. rammenta che fino dal 1876 nel giornale "*Engineering* „ e nel suo libro "*Fisica dell'etere* „, pubblicato a Londra (E ed F. N. Spon, 1875), egli aveva espresso l'idea che l'elettricità statica non sia che una "risonanza „ dell'etere, come le recenti scoperte di Hertz hanno confermato sperimentalmente. Egli fa anche notare che per mostrare l'effetto attrattivo delle vibrazioni, riuscì a far star sospesi vicino a un grosso diapason vibrante dei dischetti di cartone.

J. BROWN. *Sull'ufficio del catione nelle combinazioni voltaiche, e particolarmente in quelle contenenti cloruri di jodo e di bromo.* — Non conoscendo lo stato preciso della superficie dei solidi usati nelle pile, nè l'azione che può esercitare il solvente sul metallo, nè quella di tracce d'impurità nei materiali che sogliono dirsi puri, e non avendo dati assolutamente certi sui fenomeni termochimici e termoelettrici che si presentano, è evidente che non sia facile trovare una relazione semplice fra la forza elettromotrice della pila e l'azione chimica o l'evoluzione di calore che si ha nella pila stessa. Ma è certo che per ogni pila vi deve essere una certa relazione (più o meno mascherata dalle condizioni particolari) fra la f. e. m. e le relative attrazioni chimiche fra gli elettrodi e l'ione che resta libero, misurando quelle attrazioni coi calori di combinazione delle sostanze che si attirano.

L' A. ha cercato di studiare dapprima in quali condizioni un'attrazione chimica fra il catodo e il catione possa esercitare influenza sulla f. e. m., e poi in qual modo possa avere influenza l'attrazione fra l'anodo e il catione stesso. Per questo bisognava sostituire all'idrogeno delle pile ordinarie un altro catione che avesse un calore di combinazione notevole con ambedue gli elettrodi, e ricorse quindi ai cloruri di iodo e di bromo, quali elettroliti.

Dalle esperienze fatte in proposito, l' A. ha dedotto quanto appresso:

Nel calcolare la f. e. m. teorica delle pile voltaiche per mezzo dei dati termochimici, l'attrazione chimica del catione alogeno per l'anodo non ha alcuna influenza, e si comporta come l'idrogeno o i metalli nelle pile comuni.

*Serie 3. Vol. XXXII.*

21

L'attrazione del catione alogeno per il catodo, non entra parimenti nel calcolo, se il catodo è un metallo (o un elemento così detto elettropositivo); ma se il catodo è un elemento elettronegativo, allora in certi casi ha influenza sul risultato.

I cloruri di jodo e di bromo in soluzioni acquose sono scomposti da piccole f. e. m., corrispondenti ai loro piccoli calori di combinazione, e la f. e. m. secondaria in quelle soluzioni è del medesimo ordine.

La f. e. m. di pile con soluzioni di cloruri di jodo o di bromo quali elettroliti non diminuisce chiudendo per poco tempo il circuito. Esse non si polarizzano, come le pile che contengono HCl.

Il cloruro d'jodo secco è un buon conduttore e un buon elettrolita; quello di bromo, quando è secco, non conduce affatto.

I cloruri di fosforo e di solfo, e molti dei loro sali doppi, non sono elettroliti.

T. A. EMTAGE. *Su un metodo per determinare la velocità di propagazione di una perturbazione nei mezzi elastici.* — L'A. ottiene le note formule della velocità di propagazione delle perturbazioni elastiche in modo elementare. Così per es. per le onde longitudinali che si propagano in una sbarra, siano A e B due piani fissi nello spazio e normali alla sbarra. Mentre la compressione passa per A, la pressione media in A è maggiore di quella in B di una quantità  $E l/x$ , essendo E il modulo di Joung,  $x$  lo spessore dello strato che è, ad ogni istante, compresso, ed  $l$  la grandezza della compressione. Se V è la velocità della propagazione, il tempo che la compressione impiega ad attraversare A è  $\frac{x}{V}$ . Allora il momento generato nello spazio fra A e B è

$$(1) \quad ES \cdot \frac{l}{x} \cdot \frac{x}{V}$$

Ma ad ogni secondo una lunghezza V della sbarra è spostata di una distanza  $l$ ; così per il momento fra A e B, mentre la compressione si trasporta da A in B, se  $d$  è la densità della sbarra, si ha anche l'espressione

$$(2) \quad V l S d.$$

Uguagliando questi due valori, si ha

$$V^2 = \frac{E}{d},$$

che è la nota espressione di V.

Considerazioni analoghe valgono pel caso delle onde trasversali, per le quali nella (1) si ha da porre la rigidità M invece del modulo E.

J. SWINBURNE. *L' elettrometro usato come wattmetro.* — L'A. indica come disporre le comunicazioni per poter far servire un elettrometro a quadranti nella misura dei watt assorbiti da un circuito o da un apparecchio qualunque.

J. WIMSHURST. *Macchina alternativa a influenza.* — Un asse centrale portato da due colonnette fissate su una base di legno, sostiene un disco di vetro verniciato, del diametro di 40 cm, al quale son fissati dei settori di foglia di stagno, ad angoli arrotondati, lunghi 10 cm. e larghi 25 mm. alla parte superiore e 6 mm. a quella inferiore. Ordinariamente i settori di una faccia son disposti in modo da alternarsi con quelli dell'altra faccia del disco; ma la macchina funziona qualunque sia il modo con cui si fissano i settori stessi: soltanto essa funziona meglio quanto maggiore è il numero dei settori.

Il disco è montato al centro e nel piano di un quadro di legno di 50 cm. di lato. Questo quadro sostiene 4 induttori formati con lastre di vetro quadrate, ma con un vertice smussato per dar passaggio all'asse del disco girevole anzidetto. Son verniciati con ceralacca, e su una loro faccia portano un settore di stagnola (le cui dimensioni sono: 10 cm. nel senso del raggio e 17 cm. lungo la circonferenza media) nel cui mezzo è masticiato un disco di legno che serve a portare un filo metallico piegato a squadra e che all'estremità libera porta uno spazzolino di finissimi fili di ottone. Due di questi induttori son montati sulla parte anteriore del quadro, agli angoli opposti: cioè uno superiormente a sinistra, e l'altro inferiormente a destra; gli altri due sono sulla parte posteriore: uno superiormente a destra e l'altro inferiormente a sinistra. Gli spazzolini toccano il disco girevole nel centro di ciascuno dei quadranti che restano scoperti dagli induttori. Due degli induttori possono esser sostituiti anche da una sbarra di sostanza isolante, munita di due spazzolini. Gli spazzolini posson riunirsi metallicamente a dei pezzi d'ottone sostenuti da colonne isolanti.

Girando il disco, la macchina si eccita da sè, anche se il disco non porta alcun settore metallico, e si ha una successione continua di scintille: ma con questa macchina è impossibile caricare un condensatore, perchè il flusso di scintille non è che il risultato della oscillazione di una piccola carica che cambia di segno ogni volta che il disco fa circa  $\frac{3}{4}$  di giro, come può riconoscersi facilmente facendo girare lentamente il disco e facendo comunicare un elettroscopio a foglie d'oro con uno degli induttori.

Quanto alla teoria di questa macchina, l'A. crede che possa stabilirsi come appresso. Si ammetta che uno degli induttori ac-

quisti comunque una carica iniziale: questa produce per induzione una carica sulla faccia opposta del disco rotante, e questa per il moto del disco e per il contatto dello spazzolino è portata a un induttore contiguo, e così via per gli altri induttori. Questi eccessi di elettricità ottenuti sul disco rotante, e opposti agli induttori, possono considerarsi come le prominenze di un'onda sinuosa, mentre le corrispondenti depressioni sono sotto la superficie dell'induttore. Tutto ciò, che può far questa macchina, è di produrre quest'azione ondosa sullo strato elettrico che ricopre il disco, poichè non vi sono connessioni metalliche fra induttore e induttore, nè fra la macchina e la terra.

A. ANDERSON. *Sulla focometria delle combinazioni di lenti divergenti*. — L' A. estende al caso delle lenti divergenti il metodo che fu dal Thompson indicato per quelle convergenti nei *Proceedings of the Roy. Soc.* vol. XLIX.

Vol. XXXII. — J. SWINBURNE. *Su alcuni punti dell'elettrolisi*. — L' A. mostra da prima come si possa stabilire con un ragionamento assai semplice l'equazione di Helmholtz per la f. e. m. delle pile, che deve variare con la temperatura; tratta poi del fenomeno Peltier; e parlando delle pile secondarie dice che il solfato di piombo che si forma sulle due lastre è dovuto all'azione della pila, e non ad una causa secondaria. Discute poi la teoria del Lodge sulla sede della f. e. m., ed osserva che non è necessario ritenere una parte determinata del circuito come sede della f. e. m.; poichè, in un circuito chiuso, il potenziale è ciclico.

A. SCHUSTER. *Note elettriche - I. Il potenziale vettore*. — Studiando le azioni magnetiche di correnti distribuite nello spazio in modo che le linee di corrente siano identiche, per la forma, con quelle d'induzione di sistemi magnetici dati, l' A. ha potuto osservare che bisogna correggere alcune formule date dal Maxwell per le componenti del potenziale vettore.

Se F, G, H sono quelle componenti, e  $u$   $v$   $w$  son le componenti della corrente, è noto che si ha

$$(1) \quad 4\pi u = \frac{d}{dy} \left( \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) - \frac{d}{dz} \left( \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right)$$

e analogamente per  $v$  e  $w$ .

Ponendo poi

$$(2) \quad F' = \iiint \frac{u}{r} dx dy dz, \quad G' = \iiint \frac{v}{r} dx dy dz, \quad H' = \iiint \frac{w}{r} dx dy dz$$

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{J}{r} dx dy dz$$

ove

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz},$$

Maxwell conclude che si ha

$$F = F' - \frac{d\chi}{dx}, \quad G = G' - \frac{d\chi}{dy}, \quad H = H' - \frac{d\chi}{dz};$$

mentre l' A. osserva che le derivate della funzione  $\chi$  spariscono dalle (1), talchè se  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$  sono soluzioni delle (1), la  $\chi$  resta arbitraria, e non ha il valore assegnatole dal Maxwell; e d'altra parte, se le  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$  non sono soluzioni della (1), non lo divengono nemmeno per mezzo dei termini che contengono la  $\chi$ .

E che questo avviene, l' A. lo mostra risolvendo l' indicato problema; perchè se per le componenti  $u$ ,  $v$ ,  $w$  di una corrente si pone

$$u = \frac{d\phi}{dx} \quad v = \frac{d\phi}{dy} \quad w = \frac{d\phi}{dz}$$

e si prende  $\phi = \frac{x}{r^3}$ , le linee di corrente hanno la stessa forma delle linee di forza dovute a un magnete infinitesimo che abbia un momento magnetico finito. Sostituendo questi valori di  $u$ ,  $v$ ,  $w$  nelle (2) si trova

$$F' = \frac{2\pi}{r^3} - \frac{2\pi x^2}{r^5}, \quad G' = -\frac{2\pi xy}{r^5}, \quad H' = -\frac{2\pi xz}{r^5},$$

e questi valori non soddisfano nè le (1) nè la  $J = 0$ .

Ciò avviene, perchè le equazioni di Maxwell sono applicabili soltanto a circuiti chiusi; mentre nell'esempio scelto dall' A. questa condizione non si verifica nell'origine delle coordinate, perchè la funzione potenziale  $\phi = \frac{x}{r^3}$  corrisponda al caso limite di una sorgente e di un flusso di corrente che si avvicinino indefinitamente l' una all'altra.

Per giungere a correnti chiuse, bisogna che ad esse si aggiunga una corrente lineare, che chiuda il circuito; e allora supponendo in un punto A un flusso di elettricità colla funzione potenziale  $\frac{1}{r_1}$ , in B una sorgente colla funzione  $-\frac{1}{r_2}$ , e introducendo inoltre una corrente lineare che unisca A con B, si trova per  $F'$  il valore  $-2\pi \left( \frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} \right)$ , e per  $G'$  ed  $H'$  gli stessi

valori di dianzi. Questo nuovo sistema sodisfa però all'equazioni (1), e rappresenta quindi il vero potenziale vettore per il caso considerato.

L' A. tratta ancora il caso che il conduttore sia polarizzabile magneticamente; e in fine dà il sistema di formule che esprimono le forze magnetiche di correnti continue in un conduttore, in funzione dei valori di quelle correnti alla superficie del conduttore stesso.

S. U. PICKERING. — *La teoria della dissociazione in ioni, e le sue conseguenze.* — I sostenitori della moderna teoria fisica della soluzione ritengono che la più parte dei sali, acidi e basi, quando son disciolti in un grande eccesso di acqua, si risolvano interamente nei loro ioni componenti. Oltre i fatti che addusse già contro questa ipotesi, l' A. accenna ora ad alcune obiezioni teoriche, che ritiene utile far conoscere, quantunque sia forse possibile che vengano confutate. E la principale consiste in questo, che mentre secondo Arrenius, il fondatore della teoria della dissociazione, la decomposizione di un corpo nei suoi ioni assorbe del calore, nella soluzione di molti corpi, come per es. di quella dell' HCl nell' acqua, si ha svolgimento di calore.

Per eliminare questa contraddizione alcuni dicono che la decomposizione delle molecole nei loro ioni svolge calore, poichè quel calore che deve essere assorbito nella decomposizione delle molecole negli atomi ordinari, è più che compensato da quello che si svolge nella combinazione degli atomi colle cariche elettriche.

Contro ciò l' A. obietta, fra altro, che non s' intende come una carica elettrica, che deve considerarsi come un' affezione della materia, possa combinarsi con la materia per produrre calore, pur rimanendo inalterata. Di più non si capisce come l' elettrizzazione positiva dell' idrogeno, e la negativa del cloro possa annullare la loro attrazione, mentre ciò dovrebbe invece aumentarla.

L' A. non accetta nemmeno l' altra ipotesi proposta in una recente adunanza dell' Associazione Britannica, che cioè invece di riguardare gli ioni quali atomi carichi di elettricità, si possano ritenere come modificazioni allotropiche degli atomi stessi, perchè la ritiene affatto artificiosa ed arbitraria.

Terminando, fa notare l' A. che l' ipotesi di Clausius che in una soluzione esistano sempre *alquanti* ioni liberi, è distinta affatto dalla teoria esaminata, secondo la quale *tutte* le molecole dovrebbero esser dissociate, e non già pel calore, ma per la loro affinità per cariche elettriche di ignota origine.

G. GORE. *Sui cambiamenti di energia voltaica delle leghe durante la fusione.* — Fu osservato nel 1878 da J. Regnault, che

il gallio liquido è elettropositivo rispetto al gallio solido in una soluzione neutra di solfato galloso, deducendone che il lavoro chimico disponibile di un corpo dipende non solo dalla natura specifica degli atomi, ma anche dal numero totale delle calorie che determina il suo stato fisico.

L' A. ha ripetuto le esperienze del Regnault, usando delle leghe in vece del gallio, e come elettroliti delle soluzioni acquose all' un per cento di acido cloridrico e di cloruro di sodio, e soluzioni quasi sature delle medesime sostanze. Egli ha trovato che somministrando del calore, la parte riscaldata della lega diviene gradatamente elettropositiva, rispetto alla porzione fredda al di sopra del suo punto di fusione, e che un aumento più o meno subitaneo di forza elettromotrice si manifesta durante il successivo riscaldamento della lega e dell' elettrolita al di sopra del punto di ebollizione di quest' ultimo, e tale aumento sembra coincidere coll' istante in cui avviene la fusione della lega. L'inverso ha luogo durante lo svolgimento del calor latente di fusione e durante il successivo raffreddamento.

W. SUTHERLAND. *Teoria cinetica dei solidi, con un' introduzione sperimentale.* — In occasione di una serie di ricerche sulla elasticità dei metalli, l' A. studiò se fosse possibile di determinare anche pei solidi una relazione generale fra la elasticità e la temperatura, o per lo meno di determinare formule empiriche per ottenere le costanti d' elasticità dei metalli alla temperatura dello zero assoluto, caso interessante perchè a quella temperatura le molecole debbono essere in riposo.

Egli trovò che i risultati sperimentali si posson rappresentare per mezzo di una legge generale per tutti i metalli: cioè, se  $n$  è la rigidità alla temperatura assoluta  $\theta$ , ed  $N$  quella allo zero assoluto, e se  $T$  è la temperatura del punto di fusione, si ha per tutti i metalli che furono studiati dall' A.

$$\frac{n}{N} = 1 - \left(\frac{\theta}{T}\right)^2.$$

Poichè questi risultati posson considerarsi come una prova sperimentale che la rigidità è essenzialmente un fenomeno cinetico, l' A. propone una teoria cinetica anche pei solidi; ma prima fa osservare che il modulo di Joung deve determinarsi con metodo cinetico e non con metodo statico; e discutendo i diversi metodi proposti, dà la preferenza a quello di Kupffer delle vibrazioni laterali, e ripetendo le esperienze su diversi metalli con questo metodo alquanto perfezionato, e confrontando i suoi coi

resultati di altri, stabilisce i seguenti valori medi per il modulo di Joung a 15° c, espresso in milionesimi:

Cu	Ag	Au	Mg	Zn	Cd	Al
1220	740	760	390	930	480	680
Sn	Pb	Fe	Ni	Co	Pd.	Pt
420	190	2000	2240	1820	1050	1600

La parte teorica, e la dipendenza fra il modulo di Joung e la temperatura, saranno trattate in una Nota successiva.

W. C. D. WHETHAM. *Nota sulla teoria di Kohlrausch della velocità degli ioni.* — L' A. indica come si possa conciliare l'ipotesi del Kohlrausch che tutte le molecole di un sale presenti in una soluzione prendan parte al trasporto della corrente, con l'altra che si fa nella teoria della dissociazione, e cioè che soltanto una parte delle molecole sieno attive.

Kohlrausch calcola la velocità dei due ioni  $U = u + v$  dalla conduttività molecolare  $K/m$ , ove  $K$  è la conduttività specifica della soluzione, ed  $m$  il contenuto in equivalenti del sale, e pone

$U = u + v = \frac{K}{m}$ . Se ora supponiamo che ad ogni istante sieno attive soltanto  $\frac{1}{n}$  delle molecole, apparentemente deve porsi

$U_1 = \frac{Kn}{m}$  per poter condurre la medesima corrente, ciò che darebbe  $U_1 = n U$ . Ma questo  $U_1$  rappresenta la velocità attuale degli ioni quando son liberi, e se si considera la costanza della dissociazione come un equilibrio dinamico, esse son libere soltanto per  $1/n$  del tempo in cui son combinate; e poichè quando son combinate non hanno velocità relativa, così la loro velocità media per un tempo assai lungo è  $\frac{1}{n} U_1 = U$ , la stessa che si ha nell'ipotesi del Kohlrausch.

J. M. COWAN. *Sull'onda solitaria.* — L' A. studia l'onda che fu detta solitaria dal Russell, cioè quella che consta di una sola elevazione e di una sola depressione, che si propaga in un canale rettilineo, di sezione rettangolare, lungo la superficie dell'acqua tranquilla. Il Russell trovò che tale onda ha una forma definita, che dipende soltanto dalla profondità e dal volume dell'acqua che la costituisce, e che si propaga senza alterazione con velocità costante, eccetto una diminuzione di altezza dovuta all'attrito e ad altre resistenze.



L' A. si propone, in questa Nota, un dettagliato esame di tale onda, basato su una approssimazione assai buona; e trova che i risultati concordano sostanzialmente con quello del Russell. Egli termina facendo notare un errore incorso in una Nota di Stokes, secondo il quale l'onda solitaria non si potrebbe propagare senza cambiar di forma.

Lo Stokes però, in una Nota inserita in questo stesso volume del *Philosophical Magazine*, mentre dice di aver già da molto tempo riconosciuto l'errore in cui era incorso, non concorda col Mac Cowan circa la causa di tale errore.

In una Nota supplementare l' A. risponde a queste osservazioni, spiegando meglio alcune critiche che egli aveva fatto alla teoria dello Stokes.

S. T. PRESTON. *Termometro acustico*. — Quantunque non abbia eseguito prove sperimentali in proposito, l' A. propone di determinare le alte temperature per mezzo di un tubo di risonanza, basandosi sul fatto che la nota che può rinforzare un dato tubo, oltre che dalla sua lunghezza dipende anche dalla temperatura del gas che contiene. Così per es. un tubo contenente aria a 819° C. dovrebbe rinforzare la stessa nota che rinforza un tubo di metà lunghezza, ma con aria a 0°.

R. A. LEHFELDT. *Su una forma modificata del ponte di Wheatstone*. — Per confrontare resistenze quasi uguali, si può ottenere l'uguaglianza perfetta o con un filo campionato, a contatto scorrevole, messo in serie, o con una cassetta di resistenze messa in derivazione.

L' A. indica come servirsi praticamente di questo secondo metodo, e trova che se si prendono ambedue pressochè uguali le resistenze fisse di due lati del ponte, e se  $R$  è la resistenza che in derivazione con  $c$  fa equilibrio al rocchetto  $b$  incognito, e se  $R'$  è il nuovo valore di  $R$  quando  $c$  e la cassetta si scambiano di posto con  $b$ , si ha con molta approssimazione:

$$b = \frac{1}{2} (c' + c''),$$

ove

$$c' = \frac{cR}{c+R}, \quad c'' = \frac{cR'}{c+R'}.$$

Il rapporto  $\delta$  fra le resistenze dei due lati fissi del ponte è dato da

$$\delta = (c'' - c') 2/b.$$

J. PERRY. *Indicatore per macchine a vapore a grande velocità*.

— L' A. descrive un indicatore ottico, ottenuto coll'uso di una

cassetta a coperchio elastico come quelle degli aneroidi, sul qual coperchio sia fissato uno specchio che rifletta un raggio di luce. Quando la macchina agisce, il fascio riflesso disegna su uno schermaglio il diagramma, che può comodamente copiarsi con una matita.

R. T. GLAZE BROOK. *Sul valore di alcuni campioni di resistenza in mercurio.* — Dal confronto di alcuni tubi riempiti di mercurio dal Benoit nel 1885 con l'unità B. A., l'A. trova che il coefficiente di temperatura per il mercurio è compreso fra 0,0,875 e 0,0,870; mentre prima aveva trovato 0,0,872, e secondo Strecker dovrebbe essere 0,0,906.

S. SKINNER. *Apparecchio per misurare la compressibilità dei liquidi.* — Questo piezometro si distingue per la notevole capacità del bulbo, che è anche munito di un'appendice che permette di riempirlo facilmente. La pressione esercitata si misura con un manometro ad aria libera.

F. T. TROUTON. *Sull'influenza che ha l'ampiezza del riflettore nelle esperienze di Hertz.* — Essendosi accorto, in occasione di altri studi, che la distanza dei nodi del riflettore, nelle note esperienze di Hertz, era influenzata dalla grandezza del riflettore, l'A. studiò dettagliatamente questo soggetto, e poté constatare che il 1° nodo delle azioni elettriche si allontana più di  $\frac{1}{4}$  della lunghezza d'onda dal riflettore, tutte le volte che la dimensione del riflettore nella direzione della componente elettrica è minore di una lunghezza d'onda; per dimensioni maggiori il 1° nodo è sempre a  $\frac{1}{4} \lambda$  dal riflettore, come per un riflettore infinito. Anche per le azioni magnetiche si ha uno spostamento, ma inferiore e in direzione opposta, per riflettori che nel senso della componente magnetica hanno una dimensione minore di  $\lambda, 2$ .

Un fatto simile fu notato da Hertz nei suoi primi esperimenti; cioè che il 1° nodo non era precisamente a  $\frac{1}{4} \lambda$  dal riflettore, ed Hertz attribuì ciò a difetto di conduttività nel riflettore adoprato. Invece la causa di quello spostamento è quella indicata dall'A., perchè il riflettore di Hertz era appena largo  $\frac{1}{3}$  della lunghezza d'onda adoprata.

S. U. PICKERING. *Sul metodo di S. Lupton della riduzione dei risultati sperimentali.*

E. H. HAYES. *Considerazioni su alcune obiezioni sollevate dal sig. Lupton al metodo di Pickering per la riduzione dei risultati sperimentali.* — Tanto il Pickering, quanto l'Hayes confutano le obiezioni del Lupton (cfr. N. Cim. 32, pag. 190) e insistono sulla validità del metodo del Pickering.



# INDICE

Neerologia . . . . .	pag. 5
Sopra la tenacità e la plasticità del ferro a diverse temperature — Memoria di M. Ascoli . . . . .	8
Sulla variabilità del calore specifico dell'acqua fra 0° e + 32° — Memoria dei Proff. A. Bartoli ed E. Stracciati . . . . .	19
Sulle proprietà termiche dei vapori — Memoria di A. Battelli ( <i>Continuaz. e fine</i> ). . . . .	38
✕ Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo — Memoria del Professor Eugenio Beltrami. ( <i>Continuazione</i> ) . . . . .	50
✕ Sul principio di Huyghens — Prof. Vito Volterra ( <i>Continuazione</i> ) ✕ . . . . .	59
Sulla distribuzione dei potenziali presso il catodo — Nota preventiva del Prof. Augusto Rigbi . . . . .	94
Sulla variabilità del calore specifico dell'acqua fra 0° e + 32° — Memoria dei Proff. A. Bartoli ed E. Stracciati ( <i>continuazione</i> ) . . . . .	97
Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo — Memoria del Professore Eugenio Beltrami ( <i>continuazione e fine</i> ) . . . . .	113
☞ Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa (per dati spostamenti de' punti della superficie) — Nota del Prof. Valentino Cerruti . . . . .	121
Sulla tenacità e sulla plasticità del ferro a diverse temperature — Memoria di M. Ascoli ( <i>continuazione e fine</i> ) . . . . .	134
Sulla variazione di resistenza del ferro e del nichel nel campo magnetico — Nota del Dott. M. Cantone . . . . .	155
Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa per date forze applicate sulla superficie — Nota del Prof. Valentino Cerruti . . . . .	193
Sulla variabilità del calore specifico dell'acqua fra 0° e + 32° — Memoria dei Proff. A. Bartoli ed E. Stracciati ( <i>Continuaz. e fine</i> ) . . . . .	215
Intorno ad alcune modificazioni dell'elettrometro a quadrante del Thomson — Nota del Prof. Emilio Villari . . . . .	239
Risultati delle misure per la costruzione della carta magnetica della Svizzera — A. Battelli . . . . .	250

## RIVISTA

E. Paschen. Sulle forze elettromotrici . . . . .	65
A. Raps. Pompa automatica a mercurio . . . . .	ivi
K. Prytz. Metodo per la misura assoluta dei periodi di rotazione . . . . .	86
Detto. Determinazione del rapporto fra un periodo di rotazione e la durata di vibrazione di un diapason . . . . .	ivi
C. L. Weber. Sulla misura dell'inclinazione magnetica . . . . .	67
T. Des Coudres. Sulle proprietà termoelettriche del mercurio e della amalgama molto diluita . . . . .	68
J. Rosenthal. Sulla conduttività elettrica degli elettroliti solidi a diverse temperature . . . . .	69

P. Bachmetjew. Influenza della magnetizzazione sulle proprietà termoelettriche del ferro e del nichel . . . . .	69
W. Bohlendorff. Osservazioni alla Memoria del sig. B. Walter "Sulla prova della decomposizione dei gruppi molecolari nelle soluzioni ecc." . . . . .	70
H. Ebert. Influenza del diverso splendore delle linee spettrali sui fenomeni d'interfer. . . . .	ivi
W. Voigt. Su un apparecchio semplice per determinar la dilatazione termica dei solidi, specialmente dei cristalli . . . . .	71
R. Lamprecht. Sulle equazioni della forza elettromagnetica . . . . .	72
W. C. Röntgen. Sulla compressibilità del solfuro di carbonio, del benzolo, dell'etere etilico, e di alcuni alcoli . . . . .	ivi
W. C. Röntgen e L. Zehnder. Sull'influenza della pressione sull'indice di rifrazione dell'acqua, del solfuro di carbonio, del benzolo, dell'etere etilico e di alcuni alcoli . . . . .	ivi
T. Lohmstein. Influenza della capillarità sull'equilibrio dei galleggianti . . . . .	78
V. Bjerknes. Sul fenomeno della risonanza multipla delle onde elettriche . . . . .	ivi
R. Colley. Apparecchio per l'osservazione delle lente oscillazioni elettriche . . . . .	74
R. Colley. Sulla teoria del rocchetto di Ruhmkorff . . . . .	75
F. Narr. Sulla dispersione dell'elettricità . . . . .	ivi
C. Fromme. Ricerche magnetiche sperimentali . . . . .	ivi
Th. Lohmstein. Osservazioni ad una esperienza del sig. von Bezold sulla polarizzazione dielettrica . . . . .	76
W. Marek. Dilatazione dell'acqua . . . . .	ivi
G. Adler. Su una conseguenza della teoria Poisson-Mossotti . . . . .	77
A. Winkelmann. Sulla conduttività termica dei gas . . . . .	78
L. Arous e H. Rubens. Velocità di propagazione delle onde elettriche in alcuni coibenti solidi . . . . .	ivi
J. Vanni. Sull'apparente variabilità dell'equivalente elettrochimico del rame . . . . .	79
W. Shrader. Sulla resistenza alla diffusione per le correnti elettriche, che si propagano dalla base di un cilindro in uno spazio più esteso . . . . .	ivi
E. Pfeiffer. Azione dell'acqua sul vetro, e su un metodo elettrico per studiarla . . . . .	80
J. Ferche. Su alcune proprietà fisiche del benzolo . . . . .	ivi
P. Lebedew. Su delle misure della capacità specifica induttiva dei vapori, e sulla teoria Mossotti-Clausius dei dielettrici . . . . .	81
E. Lommel. Sulla direzione delle vibrazioni nella luce polarizzata . . . . .	ivi
C. Bohr e J. Bock. Determinazione dell'assorbimento di alcuni gas nell'acqua per temperature fra 0 e 100° . . . . .	82
V. Dvorak. Sulla teoria dell'interruttore automatico della corrente . . . . .	ivi
M. Planck. Sul principio dell'aumento dell'entropia . . . . .	83
G. Markovski. Sulla f. e m. delle pile a gas . . . . .	ivi
F. Braun. Sull'elettrostenoiosi . . . . .	84
F. Braun. Sulle relazioni elettrocapillari . . . . .	ivi
V. Bjerknes. Sul movimento dell'elettricità nell'eccitatore di Hertz . . . . .	ivi
K. Waitz. Sulla misura della velocità di propagazione delle onde elettriche nei diversi dielettrici . . . . .	87
A. Heydweiller. Elettrodinamometro assoluto per correnti molto intense . . . . .	ivi
H. Pellat. Risposta alla critica del sig. F. Braun sulla uguaglianza del potenziale al passaggio da un metallo a una soluzione di un suo sale . . . . .	89
J. O. Thompson. Sulla legge della tensione elastica . . . . .	ivi
F. Kohlrausch. Sulla solubilità di alcuni vetri nell'acqua fredda . . . . .	90
O. Krigar-Menzel e A. Raps. Sulle vibrazioni delle corde . . . . .	ivi
O. Lehmann. Osservazioni sulle scariche di una grande macchina elettrica ad influenza . . . . .	ivi
A. Elsas. Su un nuovo metodo per la determinazione delle costanti dielettriche . . . . .	91

Detto. Sulla misura delle resistenze col telefono . . . . .	92
M. Wien. Misura delle costanti d'induzione col telefono ottico . . . . .	ivi
A. Frauke. L'elettrometro a quadranti quale apparecchio di misura per le onde elettriche nei fili . . . . .	ivi
J. Elster e H. Geitel. Sulla dispersione elettrica provocata dalla luce solare nei minerali . . . . .	92
W. Negbauer. Ricerche sperimentali sulla differenza di potenziale alle superficie di contatto tra due soluzioni molto diluite . . . . .	ivi
Detto. Sull'influenza dell'elasticità susseguente e della deformazione permanente sulle misure eseguite per mezzo dell'elasticità di torsione. . . . .	ivi
Detto. Forma pratica della pila campione Latimer-Clark . . . . .	93
Detto. Pila campione per piccole differenze di potenziale . . . . .	ivi
J. Braun. Su un elettrometro assoluto da lezione . . . . .	ivi
G. Quincke. Sulle relazioni fra gl'indici di rifrazione e la compressibilità dei liquidi . . . . .	94
G. Leonhardt. Su un modo facile di determinare i poli di una macchina a influenza „	ivi
H. Le Chatelier. Sulla misura delle alte temperature . . . . .	165
Gouy. Osservazioni sulla tensione superficiale dei metalli liquidi in occasione di una Nota di Pellat . . . . .	166
D. Negreano. Variazione della costante dielettrica dei liquidi con la temperatura „	ivi
R. Blondlot e M. Dufour. Sull'influenza esercitata sui fenomeni di risonanza elettromagnetica dalla dissimetria del circuito lungo il quale si propagano le onde „	167
R. Colton. Metodo telefonico per lo studio della propagaz. delle onde elettriche „	ivi
H. Pellat. Osservazioni sull'ultima Comunicazione di Gouy, sulla tensione superficiale dei metalli liquidi . . . . .	ivi
A. Berget. Sui fenomeni elettrocapillari . . . . .	168
E. Bouty. Sulla coesistenza del potere dielettrico e della conducibilità elettrolitica „	169
C. Soret. Sulla conducibilità termica nei corpi cristallizzati . . . . .	ivi
E. Colot. Sulle tensioni dei vapori saturi dei differenti liquidi alla stessa pressione „	170
H. Abraham. Sopra un condensatore campione . . . . .	ivi
Gouy. Sui fenomeni elettrocapillari . . . . .	ivi
E. Carvalho. Assorbimento cristallino e scelta fra le diverse teorie della luce „	ivi
J. Violle. Sull'irraggiamento dei corpi incandescenti e sulla misura ottica delle alte temperature . . . . .	172
H. Le Chatelier. Sulla temperatura del Sole . . . . .	ivi
L. De La Rive. Applicazione della teoria delle linee di forza alla dimostrazione di un teorema d'elettrostatica. . . . .	173
A. Berget. Sui fenomeni elettro-capillari . . . . .	174
Lecoq De Boisbaudran. Sugli spettri elettrici del Gallio . . . . .	ivi
Paul Bary. Sugli indici di rifrazione delle soluzioni saline . . . . .	ivi
Edouard Branly. Nuova conducibilità unipolare dei gas . . . . .	175
Julien Lefèvre. Sull'attrazione di due lamine separate da un dielettrico. „	ivi
M. Ziloff. Sulla propagazione delle onde elettriche nei fili . . . . .	176
I. Klemencic. Sul contegno del ferro verso le oscillazioni elettriche . . . . .	177
J. H. Gladstone e G. Gladstone. Refrazione e dispersione del fluorobenzene e dei composti analoghi . . . . .	ivi
C. Barus. L'equilibrio chimico dei solidi, in relazione colla pressione e colla temperatura . . . . .	178
C. V. Boys, A. E. Briscoe e W. Watson. Sulla misura della radiazione elettromagnetica . . . . .	ivi
F. J. Smith. Misura del tempo della magnetizzazione di un cilindro di ferro „	ivi
A. Schuster. Teoria elementare dei fenomeni di rifrazione . . . . .	179
Lord Rayleigh. Sulla fotografia con un foro sottile . . . . .	ivi

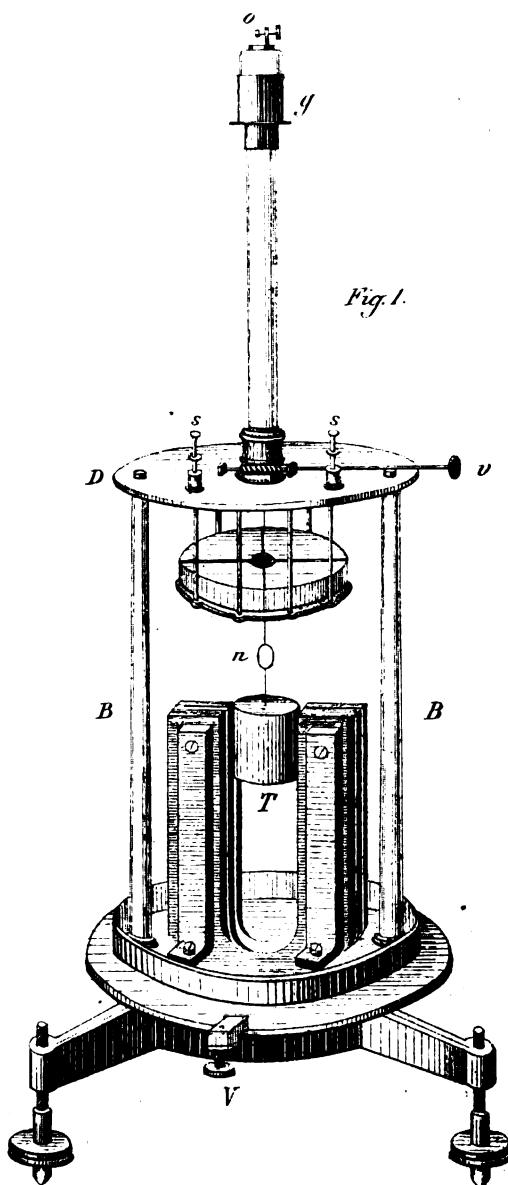
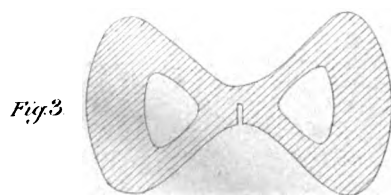
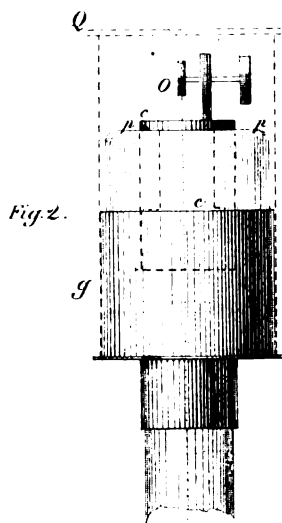
T. Preston. Il problema del contegno del campo magnetico attorno a un magnete girevole . . . . .	180
J. Swinburne. Sui condensatori per correnti alternato . . . . .	ivi
S. P. Thompson. Sull'uso dello spato fluore negli strumenti ottici . . . . .	ivi
E. L. Nichols. Sull'arco elettrico alternativo fra una sfera e una punta . . . . .	ivi
J. J. Thomson. Conduttività dei gas . . . . .	181
S. Bidwel. Esperienza da lezione per mostrare l'azione del calore sulla suscettibilità magnetica del nichel . . . . .	ivi
J. J. Thomson. Sulla rappresentazione delle proprietà del campo elettrico, per mezzo dei tubi d'induzione elettrostatici . . . . .	ivi
H. Lamb. Sulla flessione di una molla elastica piana . . . . .	184
E. B. Rosa. Sulla capacità specifica induttiva degli elettroliti . . . . .	185
G. M. Minchin. Esperienze di fotoelettricità . . . . .	186
S. Bidwell. Alcune esperienze con le pile a selenio . . . . .	ivi
J. Mc. Cowan. Sul riscaldamento dei conduttori colle correnti elettriche, e sulla distribuzione dell'elettricità nei conduttori in tal modo riscaldati . . . . .	ivi
A. Scuster. Influenza della flessione degli aghi magnetici sull'inclinazione apparente . . . . .	187
T. H. Blakesley. Soluzione di un problema geometrico nel magnetismo . . . . .	ivi
E. Wiedemann e H. Ebert. Osservazioni alla Memoria del Prof. Trowbridge — Sul moto degli atomi nella scarica elettrica — . . . . .	ivi
J. Conroy. Sul cambiamento dello spettro d'assorbimento del cobalto prodotto dal calore . . . . .	ivi
A. Anderson. Sui coefficienti d'induzione . . . . .	ivi
T. H. Blakesley. Nuove contribuzioni alla dinamometria . . . . .	188
W. N. Hartley. Sulle relazioni fra le linee dei diversi spettri . . . . .	ivi
W. W. J. Nicol. Sulla reciproca solubilità dei sali nell'acqua . . . . .	ivi
H. M. Vernon. Sul massimo di densità dell'acqua . . . . .	189
C. Barus. Confronto dei manometri di Bourdon, di Tait e di Amagat per le alte pressioni . . . . .	ivi
L. R. Wilberforce. Sul calcolo del coefficiente di viscosità di un liquido, dedotto dalla velocità del suo efflusso da un tubo capillare . . . . .	ivi
S. Lupton. Sul calcolo dei risultati sperimentali con speciale riguardo alla teoria degli idrati in soluzione . . . . .	190
Elenco delle Opere pubblicate dal Prof. Enrico Betti . . . . .	ivi
A. Potier. Sull'assorbimento della tormalina . . . . .	258
Le Verrier. Sul calore specifico dei metalli . . . . .	ivi
A. Crova. Sulla misura ottica delle alte temperature . . . . .	259
G. Lippmann. Sulla fotografia dei colori . . . . .	ivi
C. Maltzós. Misura diretta e indiretta dell'angolo di raccordamento di un liquido che non bagna il vetro . . . . .	260
H. Bagard. Sui fenomeni termoelettrici al contatto di due elettroliti . . . . .	261
A. Chassy. Sulle leggi dell'elettrolisi . . . . .	ivi
H. Poincaré. Sulla propagazione delle oscillazioni hertziane . . . . .	262
C. Limb. Sulla determinaz. del momento della coppia di torsione di una sospensione unifilare . . . . .	ivi
E. H. Amagat. Sulla determinazione della densità dei gas liquefatti e dei loro vapori saturi. — Elementi del punto critico dell'acido carbonico . . . . .	263
H. Poincaré. Sulla propagazione delle oscillazioni elettriche . . . . .	264
R. Pictet. Studio dei fenomeni fisici e chimici sotto l'influenza delle temperature molto basse . . . . .	265
E. H. Amagat. Sulla densità dei gas liquefatti e dei loro vapori saturi, e sulle costanti del punto critico dell'acido carbonico . . . . .	ivi

A. Berget. Metodo ottico per determinare la conducib. termica delle sbarre metalliche,	265
E. Jannettaz. Sulla propagazione del calore nei corpi cristallizzati.	267
H. Abraham. Sopra una nuova determinazione del rapporto $e$ fra le unità C. G. S. elettromagnetiche ed elettrostatiche . . . . .	ivi
A. Vaschy. Sulle considerazioni di omogeneità in Fisica . . . . .	ivi
E. Bouty. Sulla coesistenza del potere dielettrico e della conducibilità elettrolitica . . . . .	ivi
Moessard. Sul metodo di Doppler-Fizeau . . . . .	268
A. Vaschy. Esame della possibilità di una azione reciproca fra un corpo elettrizzato ed una calamita . . . . .	ivi
P. Galopin. Sulle variazioni di temperat. dell'acqua compressa rapidamente a 500 atm. fra $0^{\circ}$ e $10^{\circ}$ . . . . .	269
A. Perot. Misura della costante dielettrica per mezzo delle oscillazioni elettromagnet. . . . .	270
E. Branly. Sulla conducibilità di un gas compreso fra un metallo freddo e un corpo incandescente . . . . .	271
A. L. Selby. Sulla variazione della tensione superficiale colla temperatura . . . . .	272
F. J. Smith. Su alcuni nuovi metodi per determinare i punti di recalcenza nel ferro e nell'acciaio . . . . .	ivi
S. T. Preston. Alcune osservazioni sulla teoria cinetica dei gas . . . . .	ivi
Detto. La scarica luminosa . . . . .	273
J. Brown. Sull'ufficio del catione nelle combinazioni voltaiche, e particolarmente in quelle contenenti cloruri di jodo e di bromo. . . . .	ivi
T. A. Emtage. Su un metodo per determinare la velocità di propagazione di una perturbazione nei mezzi elastici . . . . .	274
J. Swinburne. L'elettrometro usato come wattmetro . . . . .	275
J. Wimbhurst. Macchina alternariva a influenza . . . . .	ivi
A. Anderson. Sulla focometria delle combinazioni di lenti divergenti . . . . .	276
J. Swinburne. Su alcuni punti dell'elettrolisi . . . . .	ivi
A. Schuster. Note elettriche — I. Il potenziale vettore . . . . .	ivi
S. U. Pickering. La teoria della dissociazione in ioni e le sue conseguenze . . . . .	278
G. Gore. Sui cambiamenti di energia voltaica delle leghe durante la fusione . . . . .	ivi
W. Sutherland. Teoria cinetica dei solidi, con un introduzione sperimentale . . . . .	279
W. C. D. Whetham. Nota sulla teoria di Kohlrausch della velocità degli ioni . . . . .	280
J. M. Cowan. Sull'onda solitaria . . . . .	ivi
S. T. Preston. Termometro acustico . . . . .	281
R. A. Lehfeldt. Su una forma modificata del ponte di Wheatstone . . . . .	ivi
J. Perry. Indicatore per macchine a vapore a grande velocità . . . . .	ivi
R. T. Glazebrook. Sul valore di alcuni campioni di resistenza in mercurio . . . . .	282
S. Skinner. Apparecchio per misurare la compressibilità dei liquidi . . . . .	ivi
F. T. Trouton. Sull'influenza che ha l'ampiezza del riflettore nelle esper. di Hertz . . . . .	ivi
S. U. Pickering. Sul metodo di S. Lupton della riduzione dei risultati sperimentali . . . . .	ivi
E. H. Hayes. Considerazioni su alcune obiezioni sollevate dal sig. Lupton al metodo di Pickering per la riduzione dei risultati sperimentali . . . . .	ivi











S  
Y  
J  
S  
J  
J  
R  
S  
F  
S  
E

P. Galepin. Sulle variazioni di temperat. dell'acqua compressa rapidamente a 500 atm. fra 0° e 10°	„ 269
A. Perot. Misura della costante dielettrica per mezzo delle oscillazioni elettromagnet.	„ 270
E. Branly. Sulla conducibilità di un gas compreso fra un metallo freddo e un corpo incandescente	„ 271
SUNTI di A. STEFANINI. — <i>Philosophical Magazine</i> . — Vol. 31 e 32, 1891.	
A. L. Selby. Sulla variazione della tensione superficiale colla temperatura	„ 272
F. J. Smith. Su alcuni nuovi metodi per determinare i punti di recalescenza nel ferro e nell'acciaio	„ ivi
S. T. Preston. Alcune osservazioni sulla teoria cinetica dei gas	„ ivi
Detto. La scarica luminosa	„ 273
J. Brown. Sull'ufficio del catione nelle combinazioni voltaiche, e particolarmente in quelle contenenti cloruri di jodo e di bromo.	„ ivi
T. A. Emtage. Su un metodo per determinare la velocità di propagazione di una perturbazione nei mezzi elastici	„ 274
J. Swinburne. L'elettrometro usato come wattmetro	„ 275
J. Wimshurst. Macchina alternativa a influenza	„ ivi
A. Anderson. Sulla focometria delle combinazioni di lenti divergenti	„ 276
J. Swinburne. Su alcuni punti dell'elettrolisi	„ ivi
A. Schuster. Note elettriche — I. Il potenziale vettore	„ ivi
S. U. Pickering. La teoria della dissociazione in ioni e le sue conseguenze	„ 278
G. Gore. Sui cambiamenti di energia voltaica delle leghe durante la fusione	„ ivi
W. Sutherland. Teoria cinetica dei solidi, con un introduzione sperimentale	„ 279
W. C. D. Whetham. Nota sulla teoria di Kohlrausch della velocità degli ioni	„ 280
J. M. Cowan. Sull'onda solitaria	„ ivi
S. T. Preston. Termometro acustico	„ 281
R. A. Lehfeldt. Su una forma modificata del ponte di Wheatstone	„ ivi
J. Perry. Indicatore per macchine a vapore a grande velocità	„ ivi
R. T. Glazebrook. Sul valore di alcuni campioni di resistenza in mercurio	„ 282
S. Skinner. Apparecchio per misurare la compressibilità dei liquidi	„ ivi
F. T. Trouton. Sull'influenza che ha l'ampiezza del riflettore nelle esper. di Hertz	„ ivi
S. U. Pickering. Sul metodo di S. Lupton della riduzione dei risultati sperimentali	„ ivi
E. H. Hayes. Considerazioni su alcune obiezioni sollevate dal sig. Lupton al metodo di Pickering per la riduzione dei risultati sperimentali	„ ivi

## PATTI D'ASSOCIAZIONE

---

Del NUOVO CIMENTO si pubblica ogni mese un fascicolo di tre fogli di stampa.

Le associazioni sono obbligatorie per un anno, e gli Associati, che per la fine di Dicembre non avranno disdetta l'associazione, s'intendono obbligati per l'anno successivo.

Il prezzo d'associazione per l'intero anno è fissato come segue:

Per il Regno Italiano, franco al destino it. L. 10. 50

Per l'Esterò, come sopra . . . . . » 12. —

Le lettere relative a dimande di associazioni, a pagamenti ed a tutto ciò che riguarda l'amministrazione del Giornale, devono essere dirette, franche di Posta, a Pisa, al gerente *P. Salvioni*. — *Tipografia Pieraccini*.

---

Ciò che riguarda la direzione scientifica del Giornale potrà esser diretto a Pisa al Prof. *R. Felici* o al Prof. *V. Volterra*.

---







A. STADERINI  
Legation  
Rome



